ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ალექსანდრე ტყეშელაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

# *შემთხვევითი ზომების ზოგიერთი თვისების კვლევა და გამოყენება*

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო  დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

*სამეცნიერო ხელმძღვანელები:*

თსუ სრული პროფესორი ფიზ-მათ. მეცნ. დოქტორი — ელიზბარ ნადარაია

თსუ ასოცირებული პროფესორი ფიზ-მათ. მეცნ. დოქტორი — გრიგოლ სოხაძე

თბილისი 2011 წელი

# შ ი ნ ა ა რ ს ი

# შესავალი

შემთხვევითი ზომები ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის უმნიშვნელოვანესი ობიექტია. საკმარისია დავასახელოთ ემპირიული განაწილებები, პუასონის შემთხვევითი ზომები და სხვა. შემთხვევით ზომებს მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს მათემატიკურ სტატისტიკაში, კერძოდ არაპარამეტრულ ბაიესურ შეფასებებში (იხ. [1]). ასეთი ზომების თვისებები დიდი ხანია რაც შეისწავლება. შედეგები, რომლებიც მიღწეული იყო გასული საუკუნის 70-იან წლებამდე, გადმოცემულია ოლაფ კალენბერგის ცნობილ წიგნში (იხ. [2]). აქ განხილულია კრებადობასთან დაკავშირებული პრობლემები, კერძო კლასების მახასიათებლები, ასახვებისას წარმოშობილი ზომადობის საკითხები და სხვა.

თეორიის განვითარებისათვის ძალზე მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა გულბარტის შრომამ [3]. მან გამოიყენა არონზაინის ([4]) ე.წ. გულოვანი რეპროდუქციული ჰილბერტის სივრცის ცნება და ზომათა კლასში შემოიღო სკალარული ნამრავლი. ამით მან საფუძველი დაუდო შემთხვევითი ზომების, როგორც ჰილბერტის სივრცის ელემენტების, კვლევებს. ამ მიმართულებით შესრულდა მრავალი შრომა. აღვნიშნოთ რამოდენიმე. 1992 წელს ელიოტმა ([5]) აჩვენა რადონ-ნიკოდიმის თეორემის ვარიანტის სამართლიანობა შემთხვევითი ზომებისათვის.

სიქუელმა ([6]) 1993 წელს შეისწავლა შემთხვევითი ზომების კრებადობის თვისებები. ამისათვის მან გამოიყენა ასეთი ზომების გარკვეული უსასრულო განზომილებიანი ჰილბერტის სივრცის ელემენტებად წარმოდგენის ტექნიკა და შესაბამისად, საკითხი დაიყვანა ჰილბერტის სივრცეში შემთხვევითი ელემენტების კრებადობამდე. მანვე 2005 წელს ([7]) გამოიყენა იგივე მეთოდი და აჩვენა ცენტრალური ზღვარითი თეორემის და დიდ რიცხვთა კანონების სამართლიანობა შემთხვევითი ზომებისათვის.

ბრიკმა და სმოლენსკიმ ([8]) მოიყვანეს ემპირიული შემთხვევითი ზომის კრებადობის პირობები ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი ზომისაკენ. ბარიშნიკოვმა და იუკიჩმა ([9]) განაზოგადეს ეს შედეგები შემთხვევითი ზომების ჯამების ნორმალური ზომისაკენ კრებადობისათვის პირობები.

მრავალი შრომაა მიძღვნილი შემთხვევით ზომების შეისწავლისადმი სრულ მეტრიკულ სივრცეებში. პრობლემატიკა დაკავშირებულია შემთხვევითი ზომებისათვის პროხოროვის თეორემის განზოგადოებასთან ასეთი სივრცეების შემთხვევაში. ეს ნაწილი კარგადაა გადმოცემული ქრაუელის მონოგრაფიაში [10]. ორბანცის [11] სტატიაში განხილულია შემთხვევითი ზომების პროექციული ზღვრების პრობლემატიკა პოლონურ სივრცეებში.

2010 წელს როუდსმა და ვარგასმა ([12]) განმარტეს უსასრულოდ დაყოფადი შემთხვევითი ზომები და დაამტკიცეს ხინჩინის თეორემის ანალოგი ასეთი ზომების მახასიათებელი ფუნქციონალებისათვის.

გასული საუკუნის 70-იანი წლებიდან იწყება სტოქასტური ვარიაციული აღრიცხვისა (ე.წ. მალიავინის აღრიცხვა) და გლუვი ზომების თეორიების აგება. 90-იანი წლებიდან მოყოლებული ამ თეორიებმა მძლავრი ბიძგი მისცეს სტოქასტური ანალიზის სხვადასხვა მიმართულებების განვითარებასა და მიღწეულის ახლებურად გააზრებას. ეს შეეხო შემთხვევითი ანალიზის ყველა მიმართულებას, მათ შორის შემთხვევითი ზომების თეორიასაც. დაისვა ახალი ტიპის ამოცანები, დამუშავდა კვლევის ახალი მეთოდები. წინამდებარე ნაშრომი ეძღვნება

სტოქასტური ვარიაციული აღრიცხვისა და გლუვი ზომების იდეების გამოყენებას შემთხვევითი ზომების კვლევაში.

პირველ თავში მოცემულია სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციების და შემთხვევითი ზომების განმარტებები, გამოკვლეულია მათი ზოგიერთი თვისება, მიღებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები, რომლებიც წარმოადგენენ კლასიკური სტოქასტური თეორიის ანალოგებს შემთხვევითი ზომებისათვის.

განიხილება ნამდვილ მნიშვნელობებიანი სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციები $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სადაც $X$ –რაიმე სიმრავლეა, $\Re$ ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა, ხოლო $(\Omega, \Lambda, P)$ ალბათური სივრცე. ეს ფუნქციები სავსებით განისაზღვრება სასრულგანზომილებიან განაწილებათა ერთობლიობით:

$$
\begin{aligned}
& m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = \\
& = P\{\omega : (\mu(\omega, A_1) \in \Delta_1, \mu(\omega, A_2) \in \Delta_2, \ldots \mu(\omega, A_n) \in \Delta_n)\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

რომელიც აკმაყოფილებს შეთანხმებულობის შემდეგ პირობებს:

$$m_{A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}, A_{n+2} \ldots A_{n+k}}\left(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, R^k\right) = m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) \tag{2}$$

$$m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = m_{S(A_1, A_2, \ldots A_n)} S(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) \tag{3}$$

სადაც $A_i \in \Re$, $i = 1,2,\ldots n.$ $n = 1,2,\ldots;$ $\Delta_i$ $(i = 1,2,\ldots n)$ ბორელის სიმრავლეებია $R$ ნამდვილ რიცხვთა სივრცეში. ხოლო $S$ ელემენტთა ნებისმიერი გადანაცვლებაა.

$\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციას ეწოდება სასრულად ადიციური, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu\left(\omega, \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\omega, A_i) \qquad (\text{თ.ყ})$$

$\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ თ.ყ. სასრულ, სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციას, ვუწოდებთ თვლადად ადიციურს, საშუალო კვადრატული აზრით, თუ

$$\lim_{n \to \infty} E\left|\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\right|^2 = 0$$

$$A_i \in \Re, \qquad i = 1,2,\ldots n. \qquad A_i \bigcap A_j = \varnothing \qquad (i \neq j).$$

შემთხვევითი, თითქმის ყველგან სასრული, $\mu(\omega, A)$ სიმრავლეთა ფუნქციის $k$-ური მომენტი ასე განიმარტება:

$$\alpha_k(A_1, A_2, \ldots A_k) = E\mu(A_1)\mu(A_2)\ldots\mu(A_k)$$

$$A_i \in \Re, \qquad i = 1,2,\ldots k$$

ნაჩვენებია, რომ

1) თუ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის მეორე რიგის მომენტი $\alpha_2(A_1, A_2)$ $(A_1, A_2 \in \Re)$ თითოეული არგუმენტის მიმართ სასრულად ადიციურია, მაშინ იგივე თვისება გააჩნია უფრო მაღალი რიგის მომენტებსაც და პირიქით, სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$, რომელსაც გააჩნია თითოეული არგუმენტის მიმართ სასრულად ადიციური მეორე რიგის მომენტი, თვითონაა ადიციური შესაბამისი აზრით.

2) საშუალო კვადრატული აზრით თვლადად ადიციური, თ.ყ. სასრული, სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ფუნქციის ყველა არსებული

მომენტი, თვლადად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქციაა თითოეული არგუმენტის მიმართ და პირიქით, თ.ყ. სასრული, სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვლადად ადიციური მეორე რიგის მომენტი თითოეული არგუმენტის მიმართ, თვითონაა თვლადად ადიციური საშუალო კვადრატული აზრით და მისი ყველა არსებული მომენტიც თვლადად ადიციურია თითოეული არგუმენტის მიმართ.

დამტკიცებულია თეორემა

**თეორემა 1.1.1**. თუ $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სასრულად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქციაა, მაშინ

$$m_{\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} A_i, A_1, A_2, \ldots A_{k+1}}(\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{k+1}) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2}\ldots\int\limits_{\Delta_k} m_{A_1, A_2 \ldots A_k, A_{k+1}}(dx_1, dx_2 \ldots dx_k, \Delta - \sum_{i=1}^{k} x_i \bigcap \Delta_{k+1}) \tag{4}$$

$$A_l \in \Re; \quad A_l \bigcap A_s = \varnothing \quad (l \neq s); \quad l, s = 1,2,\ldots k+1$$

განვიხილოთ ზომათა ერთობლიობა

$$m_{A_1 A_2 \ldots A_n}(\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n) \tag{5}$$

$$A_i \in \Re \quad ; \quad \Delta_i \in B; \quad i = 1,2,\ldots.$$

სადაც $B$ ბორელის ალგებრაა $R$-იდან.

**თეორემა 1.1.2**. თუ (5) ზომათა ერთობლიობა აკმაყოფილებს (2), (3) და (4) პირობებს, მაშინ არსებობს სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega, A)$, რომელიც თითქმის ყველგან სასრულად ადიციურია და რომლის სასრულგანზომილებიან განაწილებებს აქვთ (1) სახე. თუ გარდა ამისა შესრულებულია პირობა:

$$\int z^2 m_{A_n}(dz) \to 0$$

როცა $A_n \to \varnothing$, მაშინ $\mu(\omega, A)$ საშუალო კვადრატული აზრით $\sigma$-ადიციურია.

ვუწოდოთ სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A)$ ფუნქციის მახასიათებელი ფუნქცია, ფუნქციათა შემდეგ ერთობლიობას

$$\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) = Ee^{i\sum\limits_{k=1}^{n} t_k \mu(A_k)} \tag{6}$$

$$t_k \in R, \quad A_k \in \Re, \quad k = 1,2,\ldots n, \quad n = 1,2,\ldots;$$

$\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n)$ მახასიათებელი ფუნქციებისათვის შეთანხმებულობის (10) და (11) პირობები ასე ჩაიწერება:

$$\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n, A_{n+1} \ldots A_{n+k}}(t_1, t_2 \ldots t_n, 0 \ldots 0) = \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) \tag{7}$$

$$\aleph_{S(A_1, A_2 \ldots A_n)} S(t_1, t_2 \ldots t_n) = \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) \tag{8}$$

თუ $\mu(\omega, A)$ სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა, მაშინ

$$\aleph_{A_1,A_2\ldots A_n}(t+t_1,t+t_2\ldots t+t_n)=\aleph_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,A_1,A_2\ldots A_n}(t,t_1,t_2\ldots t_n) \tag{9}$$

$$t_k\in R;\quad A_i\in\Re;\quad A_i\bigcap A_j=\varnothing\quad (i\neq j);\quad k,i,j=1,2\ldots n;\quad n=1,2,\ldots$$

**თეორემა 1.2.1.** თუ ფუნქციათა ერთობლიობა

$$\aleph_{A_1,A_2\ldots A_n}(t_1,t_2\ldots t_n)$$

$$t_k\in R,\qquad A_k\in\Re,\qquad k=1,2,\ldots n,\quad n=1,2,\ldots;$$

დადებითად განსაზღვრულია და აკმაყოფილებს (7), (8) პირობებს, მაშინ არსებობს სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega,A)$ $(A\in\Re)$, რომელიც აკმაყოფილებს (5) ტოლობას. თუ, გარდა ამ პირობებისა, შესრულებულია (9) მაშინ $\mu(\omega,A)$ სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა.

შემდგომ, აგებულია ინტეგრალი შემთხვევითი ზომებით. იგულისხმება, რომ არსებობენ $\mu(A,\omega)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის მომენტები:

$$E\mu(A)=0 \quad \text{და} \quad E\mu(A_i)\mu(A_j)=\beta(A_i\times A_j).$$

განიხილება მარტივ კომპლექსურ მნიშვნელობებიანი $\varphi(x)$ $(x\in X)$ ფუნქციათა $H_0$ სიმრავლე.

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k I_{A_k}(x)$$

$$A_k\in\Re,\quad \varphi_k\in C,\quad \bigcup_{k=1}^{n}A_k=X,\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j),\ k=1,2,\ldots n$$

$H_0$ სიმრავლეზე შემოღებულია სკალარული ნამრავლი შემდეგი ტოლობის საშუალებით

$$(\varphi,\psi)=\sum_{i,j=1}^{n,m}\beta(A_i\times\overline{A}_j)\varphi_i\overline{\psi}_j=\int_X\int_X\varphi(x)\varphi(y)\beta(dx\times dy) \tag{10}$$

$H_0$ სივრცის (10) სკალარული ნამრავლით გასრულების და ფაქტორიზაციის შედეგად მიღებული სივრცეს ავღნიშნავთ $H$-ით. $\varphi(x)\in H_0$ ფუნქციიდან ინტეგრალი $\mu(A)$ შემთხვევითი ზომით ასე განიმარტება

$$\int_X\varphi(x)\mu(dx)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\mu(A_k)\equiv\langle\varphi,\mu\rangle$$

ასეთი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$E(\langle\varphi,\mu\rangle,\langle\psi,\mu\rangle)=E\left(\int_X\varphi(x)\mu(dx)\cdot\overline{\int_X\psi(y)\mu(dy)}\right)=$$

$$\int_X\int_X\varphi(x)\overline{\psi(y)}E(\mu(dx),\mu(dy))=\int_X\int_X\varphi(x)\overline{\psi(y)}\beta(dx\times dy)=(\varphi,\psi)_{H_0}$$

$\varphi(x)\in H$ ფუნქციებისათვის არსებობს მიმდევრობა $\varphi_k(x)\in H_0$ ისეთი, რომ

$$\|\varphi-\varphi_k\|_H \to 0,$$

რადგან $\|\varphi_k-\varphi_m\|_H = E\left|\langle\varphi_k,\mu\rangle-\langle\varphi_m,\mu\rangle\right|^2 \to 0$, ამიტომ არსებობს შემთხვევითი სიდიდე $\xi$ ისეთი, რომ

$$E\left|\langle\varphi_k,\mu\rangle-\xi\right|^2 \to 0,$$

და

$$\xi \stackrel{def}{=} \langle\varphi,\mu\rangle = \int_X \varphi(x)(dx)$$

სიდიდეს ვუწოდებთ ინტეგრალს $\varphi(x)\in H$ ფუნქციიდან $\mu(A,\omega)$ შემთხვევითი ზომით.

სიმრავლეთა სასრულად ადიციურ $\mu(A,\omega)$ $(A\in\Re,\omega\in\Omega)$ შემთხვევით ფუნქციას ვუწოდებთ დიფერენცირებადს $h$ $(h\in X)$ მიმართულებით, თუ არსებობს შემთხვევითი ფუნქცია $\mu'_h(A,\omega)$ $(A\in\Re,\omega\in\Omega)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{s\to 0} E\left|\frac{\mu(A+sh)-\mu(A)}{s}-\mu'_h(A)\right|^2 = 0 \quad (s\in R)$$

ნაჩვენებია, რომ, თუ $\beta(A_1\times A_2)$ დიფერენცირებადია თითოეული არგუმენტის მიმართ $h$ მიმართულებით და არსებობს შერეული წარმოებული $D_h^1 D_h^2\beta(A_1\times A_2)$, მაშინ შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(A,\omega)$, დიფერენცირებადია $h$ მიმართულებით და

$$D_h^1\beta(A_1\times A_2) = E\left(\mu'_h(A_1)\mu(A_2)\right)$$

$$D_h^2\beta(A_1\times A_2) = E\left(\mu(A_1)\mu'_h(A_2)\right)$$

$$D_h^1 D_h^2\beta(A_1\times A_2) = E\left(\mu'_h(A_1)\mu'_h(A_2)\right)$$

ამ თვისებების გათვალისწინებით დამტკიცებულია თეორემა

**თეორემა 1.5.1:** თუ $\beta(A_1\times A_2)$ $(A_1,A_2\in\Re)$ დიფერენცირებადია თითოეული არგუმენტის მიმართ და არსებობენ შერეული წარმოებულები $h$ მიმართულებით, მაშინ ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია თავის წარმოებულთან ერთად, სამართლიანია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int_X \varphi(x)\mu'_h(dx) = -\int_X \varphi'_h(x)\mu(dx)$$

$\Re$ ალგებრაზე განვიხლავთ სიმრავლეთა სკალარული ფუნქციას $\mu_\varphi(A)$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\mu_\varphi(A) = \langle\varphi, I_A\rangle = \iint_{XX} \varphi(x) I_A(y)\beta(dx\times dy) = \int_X \varphi(x)\beta(dx\times A)$$

$L$-ით ავღნიშნავთ ყველა $\mu_\varphi(A)$ $(\varphi\in H, A\in\Im)$ ფუნქციათა სიმრავლეს. $L$-ზე შემოგვაქვს ჰილბერტის სივრცის სტრუქტურა სკალარული ნამრავლით:

$$(\mu_\varphi, \mu_\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle = \iint\limits_{XX} \varphi(x)\psi(y)\beta(dx \times dy)$$

ოპერატორი, რომელიც $\varphi$-ს ასახავს $\mu_\varphi$-ში შექცევადია. ამ ოპერატორს ავღნიშნავთ $S^{-1}$ სიმბოლოთი,

$$S^{-1}\varphi = \mu_\varphi,$$

ხოლო მის შებრუნებულ ოპერატორს, რომელიც $L$-ს $H$-ში ასახავს, $S$-ით.

$$S\mu_\varphi = \varphi$$

ყოველი $\mu_\varphi \in L$ ელემენტი წარმოადგენს $H$-ზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს

$$(\mu_\varphi, \psi) = \int\limits_X \psi(x)\mu_\varphi(dx)$$

$H$ სივრცეში ვირჩევთ ორთონორმირებულ ბაზისს $\{\varphi_k\}$ $(k = 1,2,\ldots\infty)$, $L$ სივრცეში მას შეესაბამება $\{\mu_{\varphi_k}\}$ ელემენტთა ერთობლიობა, ამასთან

$$\left(\mu_{\varphi_k}\mu_{\varphi_j}\right) = \delta_{k\,j}$$

ყოველი $\mu_\varphi \in L$ ელემენტი წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\mu_\varphi = S^{-1}\varphi = S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{-1}\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{\varphi_k}$$

განვიხილოთ $Q$ $(Q \geq I)$ ჩაკეტილი დადებითად განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი $H$ ჰილბერტის სივრცეში, რომლის შებრუნებული $Q^{-1}$ ჰილბერტ-შმიდტის ოპერატორია, ხოლო $\{\varphi_k\}$ $(k = 1,2,\ldots\infty)$ $Q$ ოპერატორის საკუთრივ ვექტორთა სრული სისტემაა

$$Q\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$$

ჩვეულებრივი წესით ვაგებთ ჰილბერტ-შმიდტის სტრუქტურას

$$H_+ \subset H \subset H_-$$

სადაც $H_+$ წარმოადგენს $Q$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს ნორმით

$$\|\varphi\|_+ = \langle\langle Q\varphi \rangle\rangle \qquad (\varphi \in H_+)$$

ხოლო $H_-$, $H$ სივრცის გასრულებაა ნორმით

$$\|\psi\|_- = \left\langle\left\langle Q^{-1}\psi \right\rangle\right\rangle \qquad (\psi \in H)$$

ეს ფორმულა ვრცელდება $H_-$-ის ყოველ ელემენტზე

$$\|\xi\|_- = \left\langle\left\langle Q^{-1}\xi \right\rangle\right\rangle \qquad (\xi \in H_-)$$

$H_+$ და $H_-$ სივრცეებს შორის არსებობს ბინალური მიმართება:

$$(\varphi, \xi) = \left\langle Q\varphi, Q^{-1}\xi \right\rangle \qquad (\varphi \in H_+, \xi \in H_-)$$

$(\varphi, \xi)$ ფორმა წარმოადგენს სკალარული ნამრავლის გაფართოებას $H$-ში, $H \times H$-დან $H_+ \times H_-$-ზე.

ახლა ავაგოთ ჰილბერტის სტრუქტურა $L_+ \subset L \subset L_-$ ისე, რომ კომუტაციური იყოს შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc} H_+ & \xrightarrow{Q} & H & \xrightarrow{Q} & H_- \\ S^{-1}\downarrow & & S^{-1}\downarrow & & \\ L_+ & \xrightarrow{q} & L & \xrightarrow{q} & L_- \end{array} \qquad (11)$$

ამგვარად, $L_+$ სივრცე შედგება ისეთი $\mu_\varphi \in L$ ელემენტებისაგან რომელთათვისაც $\varphi \in H_+$ და

$$\mu_\varphi(A) = \int_X \varphi(x)\beta(A \times dx) \qquad (A \in \Re),$$

$q$ ოპერატორი ცალსახად განსაზღვრავს $L_-$ სივრცეს. მისი ელემენტები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\mu_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{\varphi_k} \qquad c_k = (\mu_\xi, \mu_{\varphi_k}) \qquad (k = 1,2,\dots)$$

სადაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right|^2 < \infty$$

$\mu_\xi \in L_-$ წარმოადგენს განზოგადებულ ზომას და იგი არის წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი $H_+$-ზე, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$(\varphi, \mu_\xi) = \int_X \varphi(x)\mu_\xi dt \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \mu_{\varphi_k})$$

მეორე თავში მოგვყავს შემთხვევითი ზომების ზოგიერთი, გამოყენებითი ხასიათის შედეგი. კერძოდ, მიღებულია იაკობის თეორემა შემთხვევითი ზომის არაწრფივი გარდაქმნისათვის და გამოთვლილია რადონ ნიკოდიმის სიმკვრივის ფორმულა, შესწავლილია აბსოლუტურად უწყვეტობის საკითხები და გაფართოებული სტოქასტიკური ინტეგრალები შემთხვევითი ზომების მიმართ. მოყვანილია მიღებული შედეგების გამოყენება თერმოდინამიკის კლასიკური განტოლების ამონახსნის საშუალოს შეფასებისათვის. შესწავლილია აბსოლუტურად უწყვეტობის საკითხი ერთი ზოგადი ხასიათის სასაზღვრო ამოცანისათვის შემთხვევითი "ხმაურით". თავის ბოლო ნაწილი ეხება დიფერენციალური განტოლებების საწყისი განაწილების სტატისტიკურ შეფასებას, ინტერვალის ბოლოს არსებულ დაკვირვებათა საფუძველზე.

განიხილება სივრცეების ჰილბერტის სტრუქტურა (11), რომელიც გამარტივებულად ასე ჩაიწერება

$$H_+ \overset{Q}{\subset} H \overset{S}{=} H^* \overset{Q}{\subset} H_-$$

ამასთან, განაწილება $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}_\Delta(A) \overset{def}{=} P\{\nu(\Delta) \in A\}$ თავმოყრილია $H_-$-ში. ვგულისხმობთ, რომ $\tilde{\mu}$ განაწილება წარმოადგენს გლუვ ზომას $H_-$- ე. ი. არსებობს გლუვი ფუნქცია $\lambda : H_- \to H_-$, რომელსაც $\tilde{\mu}$ ზომის ლოგარითმული

წარმოებული ეწოდება, ისეთი, რომ ყოველი $f \in L(H_-, H_+)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\int_{H_-} <\varphi, f'(\mu)> \tilde{\mu}(d\mu) = -\int_{H_-} f(\mu) <\varphi, \lambda(\mu)> \tilde{\mu}(d\mu)$$

$<\varphi, \lambda(\mu)>$ გამოსახულებას ვუწოდებთ განზოგადებულ სტოქასტურ ინტეგრალს, რომელსაც ასე ავღნიშნავთ

$$\int_X \varphi(x)\lambda(\mu)(dx) \tag{12}$$

(12) ინტეგრალს გავრცელებულს გლუვ $\varphi(x,\mu) \in H$ ფუნქციებზე კვლავ ვუწოდებთ გაფართოებულ სტოქასტურ ინტეგრალს და ასე ავღნიშნავთ:

$$\int_X \varphi(x)\lambda(\mu)(dx) = \langle \lambda + D, \varphi \rangle$$

ვთქვათ, $\widetilde{\mu}$ გლუვი ზომაა $H_-$-ში, ე.ი. არსებობს ლოგარითმული წარმოებული $\lambda(\mu)$, $H_+$-სივრცის მუდმივი ელემენტების მიმართულებით, მაშინ $\widetilde{\mu}$-ს გააჩნია ასეთი სახის ლოგარითმული წარმოებული

$$\rho_{\tilde{\mu}}(z,\mu) = < \lambda(\mu), z(\mu) > + trz'(\mu)$$

$z(\mu): H_- \to H_+$ ვექტორული ველის მიმართ.

ვთქვათ $u_{ts}$, $t,s \in (\alpha, \beta)$ ინტეგრალური ნაკადია, შეთანხმებული $z(\mu,t)$ ვექტორულ ველთან. ე.ი.

$$\frac{du_{ts}\mu}{\partial t} = z(u_{ts}\mu, t), \qquad u_{\tau\tau}\mu = \mu$$

და $\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu} \cdot u_{tt_0}^{-1}$. შამართლიანია

**თეორემა 2.1.1.** თუ $z(\mu,t)$ დიფერენცირებადია $\mu$-ს მიმართ და $z'_\mu(\mu,t): H \to H$, $z(\mu,t) \in H$ ყოველი $t$ და $\mu$-თვის, ხოლო $\widetilde{\mu}$-ს გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული

$$\rho_{\widetilde{\mu}}(\varphi,\mu) = < \lambda(\mu), \varphi >$$

$H_+$-სივრცის მუდმივი ველების მიმართ, მაშინ ყველა $\mu_t$-ზომა ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$\frac{d\tilde{\mu}_t}{d\tilde{\mu}_\tau}(\mu) = \exp\left\{-\int_\tau^t \left[ < \lambda\left(u_{st_0}^{-1}\mu\right), \upsilon_s\left(u_{st_0}^{-1}\mu\right) > + tr\frac{d\nu_s}{d\mu}\right] d\nu \right\},$$

სადაც $\upsilon_t(\mu) = -\left(u'_{tt_0}\right)^{-1} z(t,\mu)$.

შემდგომ შესწავლილია $\tilde{\mu}$ ზომის არაწრფივი გარდაქმნის საკითხი $H_-$-ში. შამართლიანია

**თეორემა 2.2.1.** ვთქვათ, $\widetilde{\mu}$ გლუვი ზომაა $H_-$-ზე, რომლის ლოგარითმული წარმოებულია

$$\rho_{\tilde{\mu}}(\varphi,\mu) = <\lambda(\mu),\varphi>.$$

$f: H_{-} \to H_{-}$ შექცევადი გარდაქმნაა, რომლის შექცეულიც მოიცემა ფორმულით:

$$f^{(-1)}: \mu \to \nu = \mu + F(\mu)$$

ამასთან შესრულებულია პირობები:

1) $F: H_{-} \to H_{+}$ უწყვეტი დიფერენცირებადი ასახვაა;

2) $I + tF'(\mu)$ წრფივ ოპერატორს გააჩნია შემოსაზღვრული შექცეული , როცა $0 \le t \le 1$, $\mu \in H_0$.

მაშინ ზომები $\tilde{\mu}$ და $\tilde{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu} f^{(-1)}$ ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს სახე:

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mu}}}{d\tilde{\mu}}(\mu) = \det(I + F'(\mu))\exp\left\{\left\langle \int_0^1 \lambda(\mu + tF(\mu))dt, F(\mu)\right\rangle\right\} \tag{13}$$

თუ $\tilde{\mu}$ გაუსის კანონიკური ზომაა $H_{-}$-ში, მაშინ $\lambda(\mu) = -\mu$ და (21)-დან ვღებულობთ

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mu}}}{d\tilde{\mu}}(\mu) = \det(I + F'(\mu))\exp\left\{- < \mu_1 F(\mu) > - \frac{1}{2} \| F(\mu) \|^2\right\} \tag{14}$$

თუ $\tilde{\mu}$ გაუსის ზომაა ნულოვანი საშუალოთი და $R$ ბირთვული კორელაციური ოპერატორით $H$-ში

$$R = \int_X \int_X E\mu(t)\,\mu(z)\,\beta(dt \times dz)$$

მაშინ, $\lambda(\mu) = -R^{-1}\mu$ და

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mu}}}{d\tilde{\mu}}(\mu) = \det(I + F'(\mu))\exp\left\{-\int_X F'(\mu)\left(R^{-\frac{1}{2}}\mu\right)(d\mu) - \frac{1}{2}\|F(\mu)\|^2\right\} \tag{23}$$

ამ თეორემისა და (13), (14), (15) ფორმულების გამოყენებით შემდგომში შესწავლილია ზომათა განაწილებები, რომლებიც წარმოადგენენ ზომებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებს შემთხვევითი შესაკრებებით.

განიხილება რეალური გაზის ადიაბატის განტოლება

$$\frac{dV}{dT} + \xi(T) = \frac{C_v(T)}{P(T,V)} \tag{24}$$

$$T_0 \le T \le a, \qquad \xi(T_0) = 0, \qquad V(T_0) = 0, \qquad M\xi(T) = 0,$$

სადაც $\xi(T)$ გაუსის შემთხვევითი პროცესია $R(T,S)$ კორელაციის ფუნქციით

(24) განტოლების პარალელურად განიხილება გაწრფივებული განტოლება

$$\frac{dU}{dT} + \xi(T) = 0 \tag{25}$$

ავღნიშნოთ $$R_u(t,s) = EU(t)U(s) = \int_{T_0}^{t}\int_{T_0}^{s} R(\tau.\lambda)d\tau d\lambda$$

(24) და (25) განტოლების ამონახსნები $U(T)$ და $V(T)$ წარნოადგენენ შემთხვევით ზომებს. თეორემა 2.2.1-ის გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ მათ მიერ წარმოქმნილი ზომები $\mu_u$ და $\mu_v$ ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს სახე

$$\rho(U)=\frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)=\exp\left\{-\int_{T_0}^{a} g(\tau,U)dW(\tau)-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a} g^2(\tau,U)d\tau\right\}$$

სადაც $g(\tau,V)$ წარმოადგენს

$$-\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(t)}{P(t,V)}dt=\int_{T_0}^{a} K_u(T,\tau)g(\tau,V)d\tau$$

განტოლების ამონახსნს, ხოლო $K_u(t,s)$-ით აღნიშნულია ისეთი ორი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$R_u(t,s)=\int_{T_0}^{a} K_u(t,\tau)K_u(s,\tau)d\tau$$

თუ $\Phi$ არის $L_2[T_0,a]$-ზე განსაზღვრული ფუნქციონალი $\Phi: L_2\to R$. (24) განტოლების ამონახსნისათვის $\Phi$ ფუნქციონალის მნიშვნელობის $E\Phi(V)$ საშუალო ასე გამოითვლება

$$E\Phi(U)\rho(U)=E\Phi(U)\exp\left\{-\int_{T_0}^{a} g(\tau,U)dW(\tau)-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a} g^2(\tau,U)d\tau\right\}$$

შემდგომ განხილულია შემთხვევა როცა $\xi(t)$ (24) და შესაბამისად (25) განტოლებაში წარმოადგენს ე. წ. „თეთრ ხმაურს". ამ დროს მიიღება სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებება

$$dV+dW(T)=\frac{C_v(T)}{P(T,V)}dT$$

$$T_0\le T\le a, \qquad V(T_0)=V_0$$

სადაც $W(T)$ ვინერის პროცესია. ამ შემთხვევაში რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს ასეთი სახე მიეცემა:

$$\rho(U)=\frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)=\exp\left\{-\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,-W)}dW(\tau)+\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a}\frac{C_v^2(\tau)}{P(\tau,-W)}d(\tau)\right\}$$

და $\Phi$ ფუნქციონალის საშუალო მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$E\Phi(V)=E\Phi(-W)\exp\left\{-\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,-W)}dW(\tau)+\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a}\frac{C_v^2(\tau)}{P(\tau,-W)}d(\tau)\right\}$$

შემდეგ პარაგრაფში განხილულია მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა შემთხვევით კოეფიციენტებიანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის

დაუშვათ $\{\Omega,\Im,P\}$ ფიქსირებული ალბათური სივრცეა; $L_2=L_2([0,1]\times\Omega)$ კი ნამდვილმნიშვნელობებიანი შემთხვევით ფუნქციათა სივრცე, რომელთაც გააჩნიათ

მეორე რიგის სასრული მომენტები $\|x\|^2 = E\int_0^1 x^2(t)dt < \infty$. სკალარული ნამრავლს ამ სივრცეში აქვს სახე $(x,y) = E\int_0^1 x(t)y(t)dt$. ვთქვათ $w(t)$ ვინერის პროცესია

განიხილება მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა

$$y''(t) + \alpha(t)y(t) = w'(t), \tag{26}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (\operatorname{mod} P), \quad t \in [0,1].$$

სადაც $\alpha(t)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$\alpha(t) = a(t) + \int_0^1 A(t,s)dw(s) \tag{27}$$

(26) და (27) ამოცანის ამონახსნის ასაგებად განხილულია პირდაპირი და შებრუნებული საწყისი ამოცანა

$$y_1''(t) + \alpha(t)y_1(t) = 0, \tag{28}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0,$$

$$y_2''(t) + \alpha(t)y_2(t) = 0, \tag{29}$$

$$y_2(1) = 1, \quad y_2'(1) = 0.$$

ამ სისტემის ვრონსკიანი $V(t) = y_1(1) \neq 0 \quad (\operatorname{mod} P)$, ამიტომ $y_1$, $y_2$ სისტემა დამოუკიდებელია.

აგებულია ამ ამოცანისათვის გრინის ფუნქცია

$$G(t,s) = \begin{cases} y_1(t)y_2(s)V^{-1}(0), & \mathrm{t} \le \mathrm{s} \\ y_1(s)y_2(t)V^{-1}(0), & \mathrm{t} > \mathrm{s} \end{cases} \tag{30}$$

დამტკიცებულია შემდეგი დებულების სამართლიანობა

**თეორემა 2.4.1.** თუ (26) სასაზღვრო ამოცანისათვის შესრულებულია (27) პირობა, სადაც $a(t) \in L_2([0,1])$ და $A(t,s) \in L_2([0,1]^2)$, მაშინ (26) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ალბათობით 1, რომელიც მოიცემა დალეცკი-სკოროხოდის

$$y(t) = \int_0^1 \langle G(t,s), dw(s) \rangle$$

სტოქასტური ინტეგრალის სახით, სადაც გრინის ფუნქცია $G(t,s)$ განისაზღვრება (30) ფორმულით (28) და (29) საწყისი ამოცანების საშუალებით

შესწავლილია მეორე სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი განტოლებისათვის

$$y''(t) + a(t)y(t) = w'(t) + f'(t), \tag{31}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (\operatorname{mod} P), \quad t \in [0,1],$$

სადაც $f(t) \in W^1([0,1])$ და $a(t)$ დეტერმინირებული უწყვეტი ფუნქციებია. თეორემა 2.4.1.-ის თანახმად ამ ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება ჩვეულებრივი სტოქასტური ინტეგრალის სახით

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)dw(t) + \int_0^1 G(t,s)df(s)$$

(30) ამოცანასთან ერთად, განვიხილავთ ამოცანას:

$$x''(t)+a(t)x(t)=w(t)\,, \tag{32}$$
$$x'(0)=x'(1)=0\,, \quad (\mathrm{mod}\, P)\,, \quad t\in[0,1]\,.$$

ვთქვათ $\mu_y$ და $\mu_x$ შესაბამისად $y(t)$ და $x(t)$ შემთხვევითი პროცესების განაწილებებია. დამტკიცებულია თეორემა ამ ზომების ერთმანრთის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტობის შესახებ.

**თეორემა 2.4.2.** თუ $\mu_y$ და $\mu_x$ ზომები წარმოადგენენ შესაბამისად (31) და (32) ამოცანების ამონახსნთა განაწილებებს $L_2([0,1])$ სივრცეში, სადაც $a(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $f(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ეს ზომები ექვივალენტურია და რადონ –ნიკოდიმის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(u)=\exp\left\{-\int_0^1\int_0^1 G(t,s)u(t)df(s)dw(t)-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^1 G(t,s)df(s)\right]^2 dt\right\}$$

ნაშრომის ბოლო პარაგრაფში შესწავლილია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების საწყისი განაწილების სტატისტიკური შეფასება ინტერვალის ბოლოს არსებულ დაკვირვებათა საფუძველზე.

დაუშვათ $[0.T]$ ინტერვალზე მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y'(t)=f(t,y(t)) \tag{33}$$

განიხილება კოშის საწყისი ამოცანა $y(0)=X$, სადაც $X$ შემთხვევითი სიდიდეა უცნობი განაწილების $p(x)$ სიმკვრივით. იგულისხმება, რომ ამ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $y(t)$ ალბათობით 1, რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს. სტატისტიკისთვის შესაძლებელია ამ პროცესის დაკვირვება ინტერვალის ბოლო $T$ წერტილში, რომელიც შეესაბამება $X$-ის გარკვეულ მიუღწევად შერჩევას, ანუ გვაქვს დაკვირვებები $y_1(T),\ y_2(T),....,y_n(T)$. ამ დაკვირვებათა საფუძველზე უნდა მოხდეს $p(x)$ სიმკვრივის შეფასება.

ვთქვათ $(\Theta,F)$ ზომადი სივრცეა, $C=M(F)$ $F$-ზე განსაზღვრული ნამდვილმნიშვნელობებიანი $\sigma$-ადიციური სიმრავლეთა სივრცე ნორმით

$$\|\mu\|=(Var\ \mu)(\Theta)=\mu^+(\Theta)-\mu^-(\Theta)\,,$$

სადაც $\mu=\mu^+-\mu^-$, ჰანის გაშლაა. $M$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს და ამ სივრცის ელემენტებს შემდგომში ვუწოდებთ ზომებს.

განიხილება ზომათა ერთობლიობა $\mu_t\in M$, სადაც $t$ ნამდვილი პარამეტრია, $0\le t\le T<\infty$. იგულისხმება, რომ ყოველი ფიქსირებული $A\in F$- სათვის ფუნქცია $t\to\mu_t(A)$ უწყვეტია, $\mu_t(A)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $t\in(0,T)$ პარამეტრის მიმართ და გააჩნია ცალმხრივი წარმოებულები $t=0$ და $t=T$ წერტილებში, მაშინ ზომას

$$\nu_t=\mu_t':A\to\frac{d\mu_t(A)}{dt}$$

ეწოდება $\mu_t$ ზომის წარმოებული $t$ პარამეტრის მიმართ.

თუ ზომა $\nu_t = \mu_t'$ აბსოლუტურად უწყვეტია $\mu_t$-ს მიმართ, მაშინ რადონ-ნიკოდიმის სიმკვრივეს

$$\rho(t,x) = \frac{d\nu_t}{d\mu_t}(x)$$

ეწოდება $\mu_t$-ერთობლიობის ლოგარითმული წარმოებული $t$ პარამეტრის მიმართ. ვთქვათ $B(F)$ შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციების ბანახის სივრცეა თანაბარი ნორმით. $\mu_t$-ს დიფერენცირებადობა ექვივალენტურია შემდეგი თანაფარდობის

$$\frac{d}{dt}\int_{\Theta} \varphi(x)\mu_t d(x) = \int_{\Theta} \varphi(x)\mu_t' d(x)$$

ყოველი $\varphi \in B(F)$-თვის, ხოლო $\mu_t$ ერთობლიობის ლოგარითმული წარმოებულის არსებობა შემდეგი თანაფარდობის

$$\frac{d}{dt}\int_{\Theta} \varphi(x)\mu_t d(x) = \int_{\Theta} \varphi(x)\rho(t,x)\mu_t d(x), \qquad \varphi \in B(F)$$

სამართლიანია, შებრუნებული დებულება

**ლემა:** თუ $\mu_t \in M$, $t \in (0,T)$, ერთობლიობას $(\Theta, F)$ ზომად სივრცეში, გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული $\rho(t,x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $\rho(t,x)$ უწყვეტია $t$- ს მიმართ, $\mu_t$ თ. ყ.

2) $\rho(t,x)$ $\sigma-$შემოსაზღვრულია იმ აზრით, რომ არსებობს $\Theta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Theta_j$ დანაწილება ისეთი, რომ $\rho(t,x)$ შემოსაზღვრულია ყოველ $[0,T]\times\Theta_j$-ზე, მაშინ ნებისმიერი ორი $\mu_s$ და $\mu_\tau$ $s,\tau \in [0T]$, ზომები ექვივალენტურია და

$$p(s,t,x) = \frac{d\mu_s}{d\mu_\tau}(x) = e^{\int_\tau^s \rho(t,x)dt} \tag{34}$$

განიხილება (33) განტოლება

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(0) = X \tag{33'}$$

შემთხვევითი $X$ საწყისი პირობით, რომელსაც გააჩნია უცნობი $p(x)$ სიმკვრივე.

დავუშვათ, რომ:

$(f)$ $f(t,x)$ თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტი ფუნქციაა და გააჩნია უწყვეტი წარმოებული $f_x'(t,x)$.

$(33')$ ამოცანის ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, რომელსაც გააჩნია დიფერენცირებადი ტრაექტორიები ალბათობით 1. დაუშვათ $\mu_t$ არის $y(t)$ პროცესის განაწილება $t$ წერტილში ცხადია, რომ

$$\mu_0(A) = \int_A p(t)dt, \qquad A \in \mathrm{B}[0.T]$$

სადაც $\mathrm{B}[0,T]$ ბორელის $\sigma-$ალგებრაა $[0,T]$-ზე

**თეორემა 2.5.1:** თუ $p(t)>0$ და შესრულებულია $(f)$ პირობა, მაშინ $\mu_t$ ერთობლიობას გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული.

დაუშვათ $(33')$ ამოცანის ამონახსნზე დაკვირვება ხდება $T$ წერტილში და $y_1(T),\ y_2(T),....,y_n(T)$. შესაბამისი შერჩევაა. საჭიროა შეფასდეს $X$ შემთხვევითი სიდიდის $p(x)$ სიმკვრივე. აგებულია ბირთვული შეფასება.

დაუშვათ $K(x)$ არის ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვისებები:

$(k)$ $K(x)$ უწყვეტი, შემოსაზღვრული, ინტეგრირებადი, დადებითი ფუნქციაა $R-$ ზე და $\int_R K(x)dx=1$.

განიხილება $p(x)$ სიმკვრივის ბირთვული შეფასება

$$p_T(x)=\frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}K\left(\frac{x-y_j(T)}{h_n}\right) \qquad (35)$$

სადაც $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობას:

$(h)$ $h_n$ დადებითი, ნოლისაკენ კრებადი ნამდვილი რიცხვთა მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $nh_n\to\infty$.

განიხილება კოშის დეტერმინირებული ამოცანა

$$y'(t)=f(t,y(t)), \qquad y_0=y(0)=x$$

და მისთვის მიმდევრობა $\varphi_n(x)$, რომელიც თანაბრადკრებადია კოშის ანოცანის $y(t)$

**თეორემა 2.5.2.** თუ კოშის $(33')$ ამოცანისათვის შესრულებულია $(f)$, $(k)$ და $(h)$ პირობები, სადაც $X$ უცნობი დადებითი $p(x)$ სიმკვრივის შემთხვევითი ფუნქციაა, მაშინ მისი ძალდებული შეფასება მოიცემა ფორმულით

$$p(x)=\frac{\partial(\varphi_n(T))}{\partial x}\,p_T(\varphi_n(T))$$

# თ ა ვ ი 1

# შემთხვევითი ზომების ზოგიერთი თვისების კვლევა

ამ თავში მოცემულია შემთხვევითი ზომების განმარტებები, შემოღებულია სხვადასხვა სახის სტოქასტური ინტეგრალისა და დიფერენციალის ცნებები შემთხვევითი ზომების მიხედვით. გამოკვლეულია მათი ზოგიერთი თვისება, კერძოდ დამტკიცებულია კოლმოგოროვის თეორემის ანალოგი, მიღებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები, რომლებიც წარმოადგენენ კლასიკური სტოქასტური თეორიის ანალოგებს შემთხვევითი ზომებისათვის.

## § 1.1 ძირითადი განმარტებები და ზოგიერთი თვისება

ვთქვათ, $X$ –რაიმე სიმრავლეა, $\Re$ ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა, ხოლო $(\Omega, \Lambda, \mathrm{P})$ ალბათური სივრცეა.

განვიხილავთ სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციებს $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$, რომლებიც ღებულობენ ნამდვილ მნიშვნელობებს.

როგორც წესი, შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$, სავსებით განისაზღვრება სასრულგანზომილებიან განაწილებათა ერთობლიობით:

$$m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = \\ = P\{\omega : (\mu(\omega, A_1) \in \Delta_1, \mu(\omega, A_2) \in \Delta_2, \ldots \mu(\omega, A_n) \in \Delta_n)\} \tag{1.1.1}$$

სადაც $A_i \in \Re$, $i = 1,2,\ldots n.$ $n = 1,2,\ldots;$ (1.1.1) - ში $\Delta_i$ $(i = 1,2,\ldots n)$ ბორელის სიმრავლეებია $R$ ნამდვილ რიცხვთა სივრცეში.

განაწილებათა (1.1.1) ერთობლიობა აკმაყოფილებს შეთანხმებულობის შემდეგ პირობებს:

$$m_{A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}, A_{n+2} \ldots A_{n+k}}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, R^k) = \\ = m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) \tag{1.1.2}$$

$$m_{A_1, A_2, \ldots A_n}(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = m_{S(A_1, A_2, \ldots A_n)} S(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) \tag{1.1.3}$$

სადაც $S$ ელემენტთა ნებისმიერი გადანაცვლებაა.

$\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციას ეწოდება სასრულად ადიციური, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu\left(\omega,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(\omega,A_i)\ \ (\text{თ.ყ}) \tag{1.1.4}$$

$$A_i\in\Re,\qquad i=1,2,...n.\qquad A_i\bigcap A_j=\varnothing\qquad (i\neq j).$$

შემთხვევითი, თითქმის ყველგან სასრული, $\mu(\omega,A)$ სიმრავლეთა ფუნქციის $k$-ური მომენტი ვუწოდოთ სიდიდეს:

$$\alpha_k(A_1,A_2,...A_k)=E\mu(A_1)\mu(A_2)...\mu(A_k)$$

$$A_i\in\Re,\qquad i=1,2,...k$$

ცხადია, რომ $\alpha_k(A_1,A_2,...A_n)$ მომენტები სასრულად ადიციური ფუნქციებია თითოეული არგუმენტის მიმართ და წარმოქმნიან სასრულად ადიციურ სიმრავლის ფუნქციებს $\Re^n$ ალგებრაზე, ანუ

$$\sum_{j=1}^{l}\alpha_k\left(A_1,A_2,...,\bigcup_{j=1}^{l}A_{ij,}A_{i+1}...A_k\right)=\sum_{j=1}^{l}\alpha_k\left(A_1,A_2,...,A_{ij,}A_{i+1}...A_k\right)$$

$$A_r,A_{ij}\in\Re;\qquad r=1,2,...k;\qquad j=1,2,...l;\quad i\le j;\ A_{ij_1}\bigcap A_{ij_2}=\varnothing\ \ (j_1\neq j_2).$$

მეორეს მხრივ, სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega,A)$ $(\omega\in\Omega,A\in\Re)$, რომელსაც გააჩნია თითოეული არგუმენტის მიმართ სასრულად ადიციური მეორე რიგის მომენტი, თვითონაა ადიციური შესაბამისი აზრით.

მართლაც, დავუშვათ $A_i\bigcap A_j=\varnothing\ \ (i\neq j)$, მაშინ

$$E\left[\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\right]^2=E\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)-2E\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)+$$

$$+E\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)-2\sum_{j=1}^{n}\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,A_j\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_2(A_i,A_j)=$$

$$=\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)-2\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=0$$

მიღებული თანაფარდობიდან გამომდინარეობს (1.1.4) ტოლობის სამართლიანობა.

ცხადია, რომ თუ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის მეორე რიგის მომენტი $\alpha_2(A_1,A_2)$ $(A_1,A_2\in\Re)$ თითოეული არგუმენტის მიმართ სასრულად ადიციურია, მაშინ იგივე თვისება გააჩნია უფრო მაღალი რიგის მომენტებსაც (თუ ისინი არსებობენ). ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ თვით სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega,A)$ $(\omega\in\Omega,A\in\Re)$, სასრულად ადიციურია საშუალო კვადრატული აზრით და ამიტომ მისი ყველა არსებული მომენტი სასრულად ადიციური იქნება.

$\mu(\omega,A)$ $(\omega\in\Omega,A\in\Re)$ თ.ყ. სასრულ, სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციას, ეწოდება თვლადად ადიციური, საშუალო კვადრატული აზრით, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\lim_{n\to\infty}E\left|\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\right|^2=0$$

$$A_i\in\Re,\qquad ;\ \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\Re\qquad A_i\bigcap A_j=\varnothing\qquad (i\neq j)$$

ცხადია, ეს ექვივალენტურია იმისა, რომ $A_i \in \Re \quad (i=1,2,...)$ სიმრავლეთა მიმდევრობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_i \supset ...$ და $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, სამართლიანია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\mu(A_n)\right|^2 = 0 .$$

საშუალო კვადრატული აზრით თვლადად ადიციური, თ.ყ. სასრული, სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A) \quad (\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ფუნქციის ყველა არსებული მომენტი, იქნება თვლადად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქცია თითოეული არგუმენტის მიმართ. ვაჩვენოთ ეს მეორე რიგის მომენტების მაგალითზე. რადგან

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=i+11}^{n} A_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}^{*}$$

სადაც $A_{n+1}^{*} = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, ხოლო თვლადად ადიციური საშუალო კვადრატული აზრით $\mu(\omega, A)$ ფუნქცია სასრულად ადიციურიცაა, ამიტომ

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup A_{n+1}^{*}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu\left(A_{n+1}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu\left(A_{n+1}^{*}\right)$$

აქედან გვექნება

$$\alpha_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{1i}, A_2\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_2(A_{1i}, A_2) + \alpha_2\left(A^{*}{}_{1,n+1}, A_2\right)$$

სადაც

$$A_{1,n+1}^{*} = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_{1i} \in \Re$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_2\left(A^{*}{}_{1,n+1}, A_2\right) = 0$$

მართლაც,

$$\alpha_2\left(A^{*}{}_{1,n+1}, A_2\right) = E\mu\left(A_{i,n+1}^{*}\right)\mu(A_2) \le \sqrt{E\mu^2(A_{1,n+1}^{*}) E\mu^2(A_2)}$$

$A_{1,n+1}^{*}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ

$$A_{1,n+1}^{*} \supset A_{1,i+2}^{*} \supset ... \supset A_{1,n+k}^{*} \supset ..., \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{1,n+k}^{*} = \varnothing$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} E\mu^2(A_{1.n+1}^{*}) = 0 \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_2\left(A^{*}{}_{1,n+1}, A_2\right) = 0 .$$

სამართლიანი იქნება აგრეთვე, შებრუნებული დებულებაც: თ.ყ. სასრული, სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A) \quad (\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვლადად ადიციური მეორე რიგის მომენტი თითოეული არგუმენტის მიმართ, თვითონ იქნება თვლადად ადიციური საშუალო კვადრატული აზრით და მისი ყველა არსებული მომენტიც თვლადად ადიციური იქნება თითოეული არგუმენტის მიმართ. ამავე დროს, შემთხვევითი $\mu(\omega, A) \quad (\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ფუნქციის საშუალო

კვადრატული აზრით თვლადად ადიციურობიდან არ გამომდინარეობს მისი თვლადად ადიციურობა თითქმის ყველგან და შესაძლებლობა მისი გაგრძელებისა $\Re$–ალგებრის მომცველ რომელიმე σ–ალგებრაზე.

**შენიშვნა1.1.1**: ვთქვათ $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ვექტორული ფუნქციაა, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს რაიმე $Y$ ჰილბერტის სივრციდან. $(\cdot,\cdot)_Y$-ით ავღნიშნოთ სკალარული ნამრავლი $Y$ სივრცეში. ამ შემთხვევაშიც $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქცია განისაზღვრება (1.1.1) სასრულგანზომილებიან განაწილებათა ერთობლიობით, სადაც $\Delta_i\ (i = 1,2,...n)$ ბორელის სიმრავლეებია $Y^n$ -ში. $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციის პირველი რიგის მომენტი ვუწოდოთ ისეთ $\alpha(A) \in Y \quad (A \in \Omega)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$E(\mu(A), \varphi) = (\alpha(A), \varphi) \qquad (\forall \varphi \in Y),$$

ხოლო ოპერატორს $\beta(A_1 \times A_2) : Y \to Y$, რომელიც განსაზღვრება ფორმულიდან

$$E(\mu(A_1), \varphi_1)(\mu(A_2), \varphi_2) = (\beta(A_1 \times A_2)\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \beta(A_2 \times A_1)\varphi_2)$$

$(\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Y)$ $(\forall A_1, A_2 \in \Omega)$ ვუწოდოთ $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციის მეორე რიგის მომენტი.

$\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციას ეწოდება სასრულად ან თვლადად ადიციური საშუალო კვადრატული აზრით თუ სასრულად ან თვლადად ადიციურია საშუალო კვადრატული აზრით ყოველი წრფივი ფუნქციონალი $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციისათვის $Y$-ზე, შესაბამისი აზრით. მავე დროს, მისი პირველი და მეორე რიგის მომენტები იქნებიან სასრულად ან თვლადად ადიციურები თითოეული არგუმენტის მიმართ და წარმოქმნიან სასრულად ან თვლადად ადიციურ სიმრავლეთა ფუნქციებს შესაბამისად $\Re$ და $\Re \times \Re$ ალგებრაზე.

სამართლიანია, აგრეთვე, შებრუნებული დებულებაც თუ $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციის მეორე რიგის მომენტი $\beta(A_1 \times A_2)$ თვლადად ან სასრულად ადიციურია თითოეული არგუმენტის მიმართ $\Re \times \Re$ ალგებრაზე, მაშინ თვით $\beta(A_1 \times A_2)$ იქნება სასრულად ან თვლადად ადიციური საშუალო კვადრატული აზრით.

**თეორემა 1.1.1**. თუ $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ ნამდვილ მნიშვნელობებიანი, სასრულად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქციაა, მაშინ

$$m_{\bigcup\limits_{i=1} A_i, A_1, A_2, ...A_{k+1}} (\Delta, \Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_{k+1}) =$$

$$\int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2} ... \int\limits_{\Delta_k} m_{A_1, A_2 ... A_k, A_{k+1}} (dx_1, dx_2 ... dx_k, \Delta - \sum_{i=1}^{k} x_i \bigcap \Delta_{k+1}) \tag{1.1.5}$$

$$A_l \in \Re; \qquad A_l \bigcap A_s = \varnothing \ \ (l \neq s); \qquad l, s = 1,2,...k+1$$

დამტკიცება: (1.1.1) ფორმულიდან და (1.1.2), (1.1.3) შეთანხმებულობის პირობებიდან გვექნება, რომ თუ $A_k = A_j \ \ (i \neq j)$, მაშინ

$$m_{A_1,A_2,\ldots A_k\ldots A_{j-1},A_j,A_{j+1}\ldots A_n}\left(\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_k,\ldots\Delta_{j-1},\Delta_j,\Delta_{j+1},\ldots\Delta_n\right)=$$
$$=m_{A_1,A_2,\ldots A_k\ldots A_{j-1},,A_{j+1}\ldots A_n}\left(\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_k\bigcap\Delta_j,\ldots\Delta_{j-1},\Delta_{j+1},\ldots\Delta_n\right) \qquad (1.1.6)$$
$$A_l\in\Re,\ k,j=1,2,\ldots n-1$$

ავღნიშნოთ

$$\overline{A_l}=\bigcup_{i=l}^{k+1}A_i,\ \ A_l\in\Re;\ A_l\bigcap A_s=\varnothing\qquad (l\neq s)$$
$$i,l,s=1,2,\ldots k+1;\quad k=1,2,\ldots\ ,$$

მაშინ

$$m_{\bigcup_{i=l}^{k+1}A_i}(\Delta)=m_{A_1\bigcup\overline{A_2}}(\Delta)=\int m_{A_1,\overline{A_l}}(dx_1,\Delta-x_1)=$$
$$=\int m_{A_1,A_2\bigcup\overline{A_3}}(dx_1,\Delta-x_1)=\int\int m_{A_1,A_2,\overline{A_3}}(dx_1,dx_2,\Delta-(x_1+x_2))=\cdots= \qquad (1.1.7)$$
$$=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k}m_{A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}}\left(dx_1dx_2\ldots dx_k,\Delta-\sum_{i=1}^{k}x_i\right)$$

(1.1.6) და (1.1.7) თანაფარდობებიდან მივიღებთ

$$m_{\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i,A_1,A_2,\ldots A_{k+1}}(\Delta,\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_{k+1})=$$
$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k}m_{A_1,A_2,\ldots A_{k+1},A_1,A_2\ldots A_{k+1}}(dx_1dx_2\ldots\Delta-\sum_{i=1}^{k}x_i,\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{k+1})=$$
$$=\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2}\ldots\int_{\Delta_k}m_{A_1,A_2\ldots A_k,A_{k+1}}(dx_1,dx_2\ldots dx_k,\Delta-\sum_{i=1}^{k}x_i\bigcap\Delta_{k+1})$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი 1.1.1.** თუ $f:R^{k+1}\to R$ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციაა და არსებობს

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1}f(y,x_1,x_2,\ldots x_k)m_{\bigcup_{i=1}^{k}A_i,A_1,\ldots A_k}(dy,dx_1\ldots dx_k)$$

$$A_l\bigcap A_s=\varnothing\qquad (l\neq s);\qquad l,s=1,2,\ldots k;\qquad k=1,2,\ldots$$

მაშინ

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1}f\left(y,x_1,x_2,\ldots x_k\right)m_{\bigcup_{i=1}^{k}A_i,A_1,\ldots A_k}\left(dy,dx_1\ldots dx_k\right)=$$
$$=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k}f\left(\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i),x_1,x_2\ldots x_k\right)\right)m_{A_1A_2\ldots A_k}\left(dx_1dx_2\ldots dx_k\right)$$

კერძოდ, თუ $f\left(y,x_1,x_2\ldots x_k\right)=F\left(y-\sum_{i=1}^{k}x_i\right)$, მაშინ

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k} F\left(y-\sum_{i=1}^{k} x_i\right) m_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i, A_1 \ldots A_k}\left(dy, dx_1, \ldots dx_k\right) = F(0) \tag{1.1.8}$$

მართლაც, (1.1.5) ფორმულიდან გვექნება

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1} f(y, x_1, x_2, \ldots x_k) m_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i, A_1, \ldots A_k}(dy, dx_1 \ldots dx_k) =$$

$$= \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1} f(y, x_1, x_2, \ldots x_k) m_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i, A_1, \ldots A_k}(dy, dx_1 \ldots dx_k) =$$

$$= \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k} f(\sum_{i=1}^{k} x_i, x_1, x_2 \ldots x_n) m_{A_1 A_2 \ldots A_k}(dx_1 dx_2 \ldots dx)$$

აქედან, ცხადია გამომდინარეობს (1.1.8) ფორმულის სამართლიანობა.

**შედეგი 1.1.2.** თუ $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია სასრულად ადიციურია, მაშინ

$$m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1, A_2, \ldots A_k}\left(\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k\right) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2} \ldots \int\limits_{\Delta_k} m_{A_1, A_2 \ldots A_k, \overline{A_{k+1}}}(dx_1, dx_2 \ldots dx_k, \Delta - \sum_{i=1}^{k} x_i)$$

$$A_i \in \Re; \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad (i \neq j); \quad i, j = 1, 2, \ldots; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re; \quad \overline{A_n} = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

დამტკიცება:

$$m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1, A_2, \ldots A_k}\left(\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k\right) = m_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \bigcup \overline{A_{k+1}}, A_1, A_2, \ldots A_k}\left(\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k, R\right) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2} \ldots \int\limits_{\Delta_k} m_{A_1, A_2 \ldots A_k, \overline{A_{k+1}}}(dx_1, dx_2 \ldots dx_k, \Delta - \sum_{i=1}^{k} x_i)$$

**შედეგი 1.1.3.** თუ არსებობს ინტეგრალი

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1} f(y, x_1, x_2, \ldots x_k) m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1, \ldots A_k}(dy, dx_{1,} \ldots dx_k),$$

სადაც

$$f: R^{k+1} \to R; \; A_l \in \Re; \; A_l \bigcap A_s = \varnothing \quad (l \neq s); \quad l, s = 1, 2 \ldots; \; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re,$$

მაშინ

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1} f(y, x_1, x_2, \ldots x_k) m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1, \ldots A_k}(dy, dx_{1,} \ldots dx_k) =$$

$$= \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1} f(\sum_{i=1}^{k+1} x_i, x_1, x_2 \ldots x_k) m_{A_1, A_2 \ldots A_k \overline{A_{k+1}}}(dx_1 dx_2 \ldots dx_k dx_{k+1})$$

**დამტკიცება:** მართლაც შედეგი 1.1.1. და შედეგი 1.1.2.-დან მივიღებთ

$$\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} f(y,x_1,x_2,...x_k)m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1,...A_k}(dy,dx_{1,}...dx_k)=$$

$$=\underbrace{\int\int...\int}_{k+2} f(y,x_1,x_2...x_k)m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1,...A_k,\overline{A}_{k+1}}(dy,dx_1...dx_k,dx_{k+1})=$$

$$=\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} f(\sum_{i=1}^{k+1}x_i,x_1,x_2...x_k)m_{A_1,A_2...A_k,\overline{A}_{k+1}}(dy,dx_1...dx_k dx_{k+1})$$

კერძოდ, თუ $f(y,x_1,x_2...x_k)=F\left(y-\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\right)$, მაშინ ვღებულობთ

$$\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} F(y-\sum_{i=1}^{k}x_i)m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_1,A_2...A_k}(dy,dx_1dx_2...dx_k)=$$

$$=\underbrace{\int\int...\int}_{k+1} F(z)m_{A_1,A_2...A_k,\overline{A}_{k+1}}(dx_1,dx_2...dx_k,dz)=\int F(z)m_{\overline{A}_{k+1}}(dz)$$

ვთქვათ, $\Re$ არის $X$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრა. განვიხილოთ ზომათა ერთობლიობა

$$m_{A_1A_2...A_n}(\Delta_1\Delta_2...\Delta_n) \qquad (1.1.9)$$

$$A_i\in\Re \quad ; \quad \Delta_i\in B; \quad i=1,2,....$$

სადაც $B$ ბორელის ალგებრაა $R$-იდან.

**თეორემა 1.1.2.** თუ (1.1.9) ზომათა ერთობლიობა აკმაყოფილებს (1.1.2), (1.1..3) და (1.1.5) პირობებს, მაშინ არსებობს სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega,A)$, რომელიც თითქმის ყველგან სასრულად ადიციურია და რომლის სასრულგანზომილებიან განაწილებებს აქვთ (1.1.1) სახე. თუ გარდა ამისა შესრულებულია პირობა:

$$\int z^2 m_{A_n}(dz)\to 0 \qquad (1.1.10)$$

როცა $A_n\to\varnothing$ , მაშინ $\mu(\omega,A)$ საშუალო კვადრატული აზრით $\sigma$-ადიციურია.

დამტკიცება: სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega,A)$ ფუნქციის არსებობა, რომლის სასრულგანზომილებიანი განაწილებებიც ემთხვევა (1.1.1.) ერთობლიობას, გამომდინარეობს კოლმოგოროვის ზოგადი თეორემიდან (იხ.[22]). ვაჩვენოთ, რომ $\mu(\omega,A)$ თითქმის ყველგან სასრულად ადიციურია.

განვიხილოთ

$$E\left[\mu(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\right]^2=$$

$$\underbrace{\iint\ldots\int}_{n}\left(y-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 m_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,A_1\ldots A_n}(dy,dx_1\ldots dx_n) \qquad (1.1.11)$$

$$A_i\in\Re;\quad A_i\bigcap A_j=\varnothing\quad (i\neq j);\quad i,j=1,2\ldots n;$$

რადგან (1.1.2), (1.1.3) და (1.1.5) პირობებში სამართლიანია (1.1.8) ფორმულა, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$F\left(y-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\left(y-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

(1.1.11)-დან მივიღებთ

$$E\left[\mu(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\right]^2=0$$

ანუ

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right)\qquad (\text{თ.ყ}).$$

$\mu(\omega,A)$ შემთხვევითი ფუნქციის თვლადათ ადიციურობის დამტკიცებისათვის (თუ გავითვალისწინებთ, რომ თეორემის პირობებში სამართლიანია შედეგი 1.1..3.), განვიხილოთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\right]^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\iint\ldots\int}_{n+1}\left(y-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 m_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,A_1\ldots A_n}(dy,dx_1\ldots dx_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int z^2 m_{\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}A_i}(dz)=0$$

თეორემა დამტკიცებულია

**მაგალითი 1.1.1.** ვთქვათ $(X,\Re)$ ზომადი სივრცეა, ხოლო $(\Omega,\Lambda,P)$ ალბათური სივრცე. განვიხილოთ შემთხვევითი ფუნქცია $\xi(x,\omega)\in L_1(X,\Re)$, $x\in X,\omega\in\Omega,$ და $\nu$-ზომა $(X,\Re)$-ზე. ფუნქცია

$$\int_A\xi(x,\omega)\nu(dx)\equiv\mu(A,\omega)\qquad (1.1.12)$$

სადაც $A\in\Re,$ წარმოადგენს სიმრავლეთა შემთხვევით ფუნქციას.

ვთქვათ, $\mu(A,\omega)$ $(A\in\Re)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციაა. დავსვათ კითხვა: შეიძლება თუ არა მისი წარმოდგენა (1.1.12) სახით? თუ $\mu(A,\omega)\geq 0$, $\sigma$-ადიციური სასრული ფუნქციაა, მაშინ იგი აბსოლუტურად უწყვეტია $\nu(A)=E\mu(A,\omega)$ ზომის მიმართ, ამიტომ რადონ-ნიკოდიმის ცნობილი თეორემის

თანახმად არსებობს შემთხვევითი ფუნქცია $\varphi(x,\omega)$ $(x\in X,\omega\in\Omega)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\mu(A,\omega)=\int_A \varphi(x,\omega)\nu(dx) \qquad (\text{თ.ყ}) \tag{1.1.13}$$

ფუნქცია $\varphi(x,\omega)$ ერთადერთია $\nu$-ზომის სიზუსტით.

ასევე, თუ $\mu(A,\omega)$ $\sigma$-ადიციური სასრული ფუნქციაა, რომელსაც გააჩნია შემოსაზღვრული ვარიაცია, მაშინ იგი აბსოლუტურად უწყვეტია $\overline{\mu}(A,\omega)=Var\mu(A,\omega)$ ზომის მიმართ. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\nu(A)=E\overline{\mu}(A,\omega).$$

$\mu(A,\omega)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $\nu(A)$ ზომის მიმართ, ამიტომ არსებობს ფუნქცია $\varphi(x,\omega)$, რომლისათვისაც ასევე სამართლიანი იქნება (1.1.13) წარმოდგენა.

**მაგალითი 1.1.2.** დაუშვათ $x(t)$ შემთხვევითი სკალარული ფუნქციაა რაიმე $X=[0,T]$ (იგულისხმება ის შემთხვევაც როცა $T=\infty$) ინტერვალზე, და $\Re$ არის $A=[\tau_1,\tau_2)\in X$ ნახევარადღია ინტერვალებით წარმოქმნილი ალგებრა. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\mu(A)=\mu([\tau_1,\tau_2))=x(\tau_1)-x(\tau_2) \tag{1.1.14}$$

დავამყაროთ კავშირი $\mu(A)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის და $x(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციურ ფუნქციებს შორის. ვთქვათ $A_1=[\tau_1,\tau_2)$, $A_2=[\tau_3,\tau_4)$

$$\begin{aligned} E\mu(A_1)\mu(A_2)&=E[x(\tau_2)-x(\tau_1)]E[x(\tau_4)-x(\tau_3)]=\\ &=Ex(\tau_2)x(\tau_4)-Ex(\tau_2)x(\tau_3)-Ex(\tau_1)x(\tau_4)+Ex(\tau_1)x(\tau_3) \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\mu(A)$ და $x(t)$ შემთხვევითი ფუნქციების კორელაციური მომენტებისათვის:

$$Ex(t)x(\tau)=R(t,\tau),\quad E\mu(A_1)\mu(A_2)=\beta(A_1\times A_2);$$
$$t,\tau\in X;\quad A_1,A_2\in\Re$$

მაშინ (1.1.15) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\beta(A_1\times A_2)=R(\tau_2,\tau_4)-R(\tau_2,\tau_3)-R(\tau_1,\tau_4)+R(\tau_1,\tau_3)$$

დაუშვათ $x(t)$ $(t\in X)$ ვინერის $w(t)$ პროცესია, რომლისთვისაც $R(t,\tau)=\min(t,\tau)$, ამ შემთხვევაში კორელაციური მომენტი

$$\begin{aligned}\beta(A_1\times A_2)&=\min(\tau_2,\tau_4)-\min(\tau_2,\tau_3)-\min(\tau_1,\tau_4)+\\ &+\min(\tau_3,\tau_3)=mes(A_1\bigcap A_2)\end{aligned}$$

ცნობილია, რომ ვინერის პროცესის რეალიზაციებს არ გააჩნიათ შემოსაზღვრული ვარიაცია, მაშინ, როცა კორელაციურ $\beta(A_1\times A_2)$ ფუნქციას, რომელიც (1.1.14) ფორმულით განსაზღვრული $\mu(A)$ სიმრავლეთა ადიციური ფუნქციისათვისაა აგებული, გააჩნია შემოსაზღვრული ვარიაცია $(\Re\times\Re)$ ალგებრაზე

**მაგალითი 1.1.3.** დაუშვათ $x(t)$ $(t\in[0,T])$ საშუალო კვადრატული აზრით დიფერენცირებადი შემთხვევითი პროცესია $[0,T]$ ინტერვალზე.

$$x'(t)=\underset{\Delta\to\infty}{l.i.m.}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

მაშინ

$$\beta(A_1\times A_2)=E[x(\tau_2)-x(\tau_1)]E[x(\tau_4)-x(\tau_3)]=$$

$$=E\int_{\tau_1}^{\tau_2}x'(\tau)d\tau\int_{\tau_3}^{\tau_4}x'(\tau)d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau_3}^{\tau_4}Ex'(t)x'(\tau)dtd\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau_3}^{\tau_4}\frac{\partial^2R(t,\tau)}{\partial t\partial\tau}dtd\tau$$

**მაგალითი 1.1.4.** დაუშვათ $x(t)$ $(t\in[0,T])$ წარმოადგენს ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამს

$$x(t)=w(t)+\xi(t)$$

სადაც $w(t)$ ვინერის პროცესია, ხოლო $\xi(t)$ საშუალო კვადრატული აზრით დიფერენცირებადი შემთხვევითი პროცესი. ვიპოვოთ ამ პროცესისათვის აგებული $\mu(A)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია

$$E\mu(A_1)\mu(A_2)=\beta(A_1\times A_2)=E[w(\tau_2)-w(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\xi'(t)dt]\times$$

$$\times E[w(\tau_4)-w(\tau_3)+\int_{\tau_3}^{\tau_4}\xi'(t)dt]=mes(A_1\bigcap A_2)+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau_3}^{\tau_4}\frac{\partial^2R(t,\tau)}{\partial t\partial\tau}dtd\tau$$

სადაც $R(t,\tau)=E\xi(t)\xi(\tau)$

## §1.2. შემთხვევითი ზომის მახასიათებელი ფუნქციის შესახებ

ვუწოდოთ სიმრავლეთა შემთხვევითი $\mu(\omega, A)$ ფუნქციის მახასიათებელი ფუნქცია, ფუნქციათა შემდეგ ერთობლიობას

$$\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) = Ee^{i\sum_{k=1}^{n} t_k \mu(A_k)} \tag{1.2.1}$$

$$t_k \in R, \quad A_k \in \Re, \quad k = 1,2,\ldots n, \quad n = 1,2,\ldots;$$

ვაჩვენოთ, რომ $\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n)$ დადებითად განსაზღვრულია იმ აზრით, რომ ნებისმიერი კომპლექსური $c_l$ რიცხვებისათვის, და $t_{ki} \in R$, $l, j = 1,2,\ldots m$ $m = 1,2,\ldots;$ $k = 1,2,\ldots n$ წერტილებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\sum_{l,j=1}^{m} c_l \bar{c}_j \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_{1l} - t_{1j}, t_{2l} - t_{2j}, \ldots t_{nl} - t_{nj}) \geq 0$$

მართლაც

$$\sum_{l,j=1}^{m} c_l \bar{c}_j \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_{1l} - t_{1j}, t_{2l} - t_{2j}, \ldots t_{nl} - t_{nj}) =$$

$$= \sum_{l,j=1}^{n} c_l \bar{c}_j Ee^{i\sum_{k=1}^{n}(t_{kl} - t_{kj})\mu(A_k)} = \left( \sum_{l=1}^{m} c_l Ee^{i\sum_{k=1}^{n} t_{kl}\mu(A_k)} \right)^2$$

(1.2.1) ერთობლიობა აკმაყოფილებს შეთანხმებულობის პირობებს:

$$\aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n, A_{n+1} \ldots A_{n+k}}(t_1, t_2 \ldots t_n, 0 \ldots 0) = \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) \tag{1.2.2}$$

$$\aleph_{S(A_1, A_2 \ldots A_n)} S(t_1, t_2 \ldots t_n) = \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t_1, t_2 \ldots t_n) \tag{1.2.3}$$

$A_i \in \Re;$ $i = 1,2,\ldots n+k;$ ხოლო $S$ არის ელემენტთა ნებისმიერი გადანაცვლება. თუ $\mu(\omega, A)$ სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა, მაშინ

$$\aleph_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_1, A_2 \ldots A_n}(t, t_1, t_2 \ldots t_n) = \aleph_{A_1, A_2 \ldots A_n}(t + t_1, t + t_2 \ldots t + t_n) \tag{1.2.4}$$

$$t_k \in R; \quad A_i \in \Re; \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad (i \neq j); \quad k, i, j = 1,2\ldots n; \quad n = 1,2,\ldots$$

**შენიშვნა: 1.2.1**: ისევე როგორც პირველ პარაგრაფში, (შენიშვნა1.1.1) შეგვიძლია განვმარტოთ მახასიათებელი ფუნქცია, როცა $\mu(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega, A \in \Re)$

სიმრავლეთა შემთხვევითი ვექტორული ფუნქციაა, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს რაიმე $Y$ ჰილბერტის სივრციდან.

$$\aleph_{A_1,A_2...A_n}(\varphi_1,\varphi_2...\varphi_n)=Ee^{i\sum\limits_{k=1}^{n}(\mu(A_k,\varphi_k)}$$

$$\varphi_k\in Y,\quad A_k\in\Re,\quad k=1,2,...n,\quad n=1,2,...;$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქციაც დადებითად განსაზრვრულია შესაბამისი აზრით

**თეორემა 1.2.1.** თუ ფუნქციათა ერთობლიობა

$$\aleph_{A_1,A_2...A_n}(t_1,t_2...t_n) \tag{1.2.5}$$

$$t_k\in R,\quad A_k\in\Re,\quad k=1,2,...n,\quad n=1,2,...;$$

დადებითად განსაზღვრულია და აკმაყოფილებს (1.2.2), (1.2.3) პირობებს, მაშინ არსებობს სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(\omega,A)$ $(A\in\Re)$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.2.1) ტოლობას. თუ, გარდა ამ პირობებისა, შესრულებულია (1.2.4) მაშინ $\mu(\omega,A)$ სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა.

დამტკიცება: რადგან (1.2.5) ერთობლიობა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ ბოხნერის თეორემის თანახმად (იხ.[22] გვ. 45), იგი განსაზღვრავს ზომებს:

$$m_{A_1A_2...A_n}(\Delta_1\Delta_2...\Delta_n) \tag{1.2.6}$$

$$A_i\in\Re\quad;\quad\Delta_i\in B;\quad i=1,2,....$$

(1.2.2) და (1.2.3) პირობებიდან გამომდინარეობს (1.1.2) და (1.1.3) შეთანხმებულობის პირობები (1.2.7) ზომებისათვის, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\mu(\omega,A)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქცია, რომლის სასრულგანზომილებიან განაწილებას წარმოადგენს (1.2.6) ერთობლიობა, ხოლო ამ ზომის მახასიათებელი ფუნქცია იქნება (1.2.5) ფუნქციათა ერთობლიობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.2.1) პირობებს.

ვაჩვენოთ, რომ თუ შესრულებულია (1.2.4) პირობები, მაშინ $\mu(\omega,A)$ თ.ყ. სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა.

მართლაც,

$$Ee^{it\left[\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k)-\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_k)\right]}=Ee^{it\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k)-it\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k)}=$$

$$=\aleph_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,A_1,A_2...A_n}(t,-t,-t...-t)=\aleph_{A_1,A_2...A_n}(0,0...0)=1$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველგან

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## §1.3. ინტეგრალი შემთხვევითი ზომით

ვთქვათ, $\mu(A,\omega)$ $\left(A \in \Re\right)$ სასრულად ადიციური სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციაა, რომელიც ღებულობს კომპლექსურ მნიშვნელობებს. განვიხილოთ მარტივ კომპლექსურ მნიშვნელობებიანი $\varphi(x)$ $(x \in X)$ ფუნქციათა $H_0$ სიმრავლე. აქ $\varphi(x)$ შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k I_{A_k}(x)$$

$$A_k \in \Re, \quad \varphi_k \in C, \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X, \; A_i \cap A_j = \varnothing \; \left(i \neq j\right), \; k = 1,2,\ldots n$$

ჩავთვალოთ რომ, არსებობენ $\mu(A,\omega)$ სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის მომენტები:

$$E\mu\left(A\right) = 0 \quad \text{და} \quad E\mu\left(A_i\right)\mu\left(A_j\right) = \beta\left(A_i \times A_j\right).$$

რადგან $\mu(A,\omega)$ სიმრავლეთა სასრულად ადიციური შემთხვევითი ფუნქციაა, ამიტომ $\beta\left(A_i \times A_j\right)$ ფუნქციაც სასრულად ადიციური იქნება და ამასთან, დადებითად განსაზღვრული. მართლაც, ნებისმიერი $\varphi_k \in C \; \left(k = 1,2,\ldots n\right)$, რიცხვებისათვის

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta\left(A_i \times A_j\right)\varphi_i \overline{\varphi}_j = \sum_{i,j=1}^{n} E\mu\left(A_i\right)\mu\left(A_j\right)\varphi_i \overline{\varphi}_j = E\left|\sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right)\varphi_i\right|^2 \geq 0$$

$H_0$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი შემდეგი ტოლობის საშუალებით

$$\left(\varphi,\psi\right) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \beta\left(A_i \times \overline{A}_j\right)\varphi_i \overline{\psi}_j = \int_X \int_X \varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)\beta\left(dx \times dy\right) \tag{1.3.1}$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \overline{A}_j = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X\,; \quad A_i \cap A_l = \varnothing, \quad \overline{A}_j \bigcap \overline{A}_s = \varnothing, \quad \left(i \neq l, j \neq s\right)$$

$$A_i, A_j \in \Re, \quad i,l = 1,2,\ldots n; \quad j,s = 1,2,\ldots m; \;\; n,m = 1,2,\ldots; \;\; \varphi,\psi \in H_0$$

გავასრულოთ $H_0$ სივრცე (1.20) სკალარული ნამრავლის მიხედვით ფუნდამენტალური მიმდევრობების ზღვრების საშუალებით და მოვახდინოთ ფაქტორიზაცია. მივაკუთვნოთ ერთსა და იმავე კლასს ყველა ის $\varphi,\psi$ ფუნქციები, რომელთათვისაც $\left\|\varphi - \psi\right\|_{H_0} = 0$. ავღნიშნოთ გასრულების და ფაქტორიზაციის შედეგად მიღებული სივრცე $H$-ით.

გასრულებული სივრცის ელემენტები შეიძლება არც კი წარმოადგენდნენ ფუნქციებს $X$-ზე ჩვეულებრივი აზრით, მაგრამ თუ სიმრავლეთა ფუნქცია $\beta\left(A_i \times A_j\right)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$\beta\left(A_i \times A_j\right) = \nu\left(A_i \bigcap A_j\right) + \overline{\beta}\left(A_i \times A_j\right) \tag{1.3.2}$$

სადაც $\nu(A)$ - წარმოადგენს ზომას $\Re$-ზე, ხოლო $\overline{\beta}\left(A_i \times A_j\right)$ სასრულად ადიციური დადებითად განსაზღვრული სიმრავლეთა ფუნქციაა $\Re \times \Re$ ალგებრაზე, მაშინ გასრულებული სივრცის ელემენტები წარმოადგენენ $\nu$ ზომით კრებად ფუნქციებს $X$-ზე.

მართლაც, (1.3.1) პირობის გათვალისწინებით ვრწმუნდებით რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\|\varphi\|^2 \geq \int_X |\varphi(x)|^2 \nu(dx)$$

აქედან ცხადია, რომ ნებისმიერი მიმდევრობა $H$ სივრციდან, რომელიც კრებადია (1.3.1) სკალარული ნამრავლის აზრით, კრებადი იქნება $L_2(X,\nu)$ სივრცეშიც, ამ სივრცის რომელიღაც ფუნქციისაკენ.

ვთქვათ, $\mu(A,\omega)$ $\left(A \in \Re, \omega \in \Omega\right)$ სასრულად ადიციური სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციაა და $\varphi(x) \in H_0$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k I_{A_k}(x)$$

$$\varphi_k \in C, \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X, \; A_i \cap A_j = \varnothing \; (i \neq j), \; k = 1,2,\ldots n$$

ვუწოდოთ $\varphi(x) \in H_0$ ფუნქციიდან ინტეგრალი $\mu(A)$ შემთხვევითი ზომით, შემდეგ ჯამს

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \mu(A_k) \equiv \langle \varphi, \mu \rangle$$

ასეთი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$E\left(\langle \varphi, \mu \rangle, \langle \psi, \mu \rangle\right) = E\left(\int_X \varphi(x)\mu(dx) \cdot \int_X \overline{\psi(y)\mu(dy)}\right) =$$

$$\int_X \int_X \varphi(x)\overline{\psi(y)} E\left(\mu(dx), \mu(dy)\right) = \int_X \int_X \varphi(x)\overline{\psi(y)} \beta\left(dx \times dy\right) = (\varphi, \psi)_{H_0}$$

ვთქვათ $H$ გასრულებული და ფაქტორიზირებული სივრცეა (1.3.1) სკალარული ნამრავლით და $\varphi(x) \in H$, მაშინ არსებობს მიმდევრობა $\varphi_k(x) \in H_0$ ისეთი, რომ

$$\|\varphi - \varphi_k\|_H \to 0,$$

რადგან $\|\varphi_k - \varphi_m\|_H = E\left|\langle \varphi_k, \mu \rangle - \langle \varphi_m, \mu \rangle\right|^2 \to 0$, ამიტომ არსებობს შემთხვევითი სიდიდე $\xi$ ისეთი, რომ

$$E\left|\langle \varphi_k, \mu \rangle - \xi\right|^2 \to 0 \tag{1.3.3}$$

მივიღებთ

$$\xi \overset{def}{=} \langle \varphi, \mu \rangle = \int_X \varphi(x)\mu(dx) \tag{1.3.4}$$

ვაჩვენოთ (1.3.4) განსაზღვრის კორექტულობა.ვთქვათ, $\varphi_k, \psi_k \in H_0$, $\|\varphi - \varphi_k\|_H \to 0$, $\|\varphi - \psi_k\|_H \to 0$, $\xi_1 = \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k . \mu \rangle$, $\xi_2 = \lim_{k\to\infty} \langle \psi_k . \mu \rangle$, სადაც კრებადობას ვგულისხმობთ (1.3.3) აზრით, მაშინ

$$E|\xi_1 - \xi_2|^2 \le 2(E|\xi_1 - \langle \varphi_k, \mu\rangle|^2 + E|\xi_2 - \langle \psi_k, \mu\rangle|^2 +$$
$$E|\langle \psi_k, \mu\rangle - \langle \varphi, \mu\rangle|^2 + E|\langle \varphi_k, \mu\rangle - \langle \varphi, \mu\rangle|^2) =$$
$$= 2\left(E|\xi_1 - \langle \varphi_k, \mu\rangle|^2 + E|\xi_2 - \langle \psi_k, \mu\rangle|^2 + \|\varphi_k - \varphi\|^2 + \|\psi_k - \varphi\|^2\right) \to 0$$

აქედან გამოდის, რომ თითქმის ყველგან $\xi_1 = \xi_2$.

## §1.4. სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციების დიფერენცირებადობა

სიმრავლეთა სასრულად ადიციურ $\mu(A,\omega)$ $(A\in\Re,\omega\in\Omega)$ შემთხვევით ფუნქციას ვუწოდოთ დიფერენცირებადი $h$ $(h\in X)$ მიმართულებით, თუ არსებობს შემთხვევითი ფუნქცია $\mu'_h(A,\omega)$ $(A\in\Re,\omega\in\Omega)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{s\to 0} E\left|\frac{\mu(A+sh)-\mu(A)}{s}-\mu'_h(A)\right|^2=0 \qquad (s\in R) \tag{1.4.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\beta(A_1\times A_2)=E(\mu(A_1)\cdot\mu(A_2))$ $(A_1,A_2\in\Re)$. თუ $\beta(A_1\times A_2)$ დიფერენცირებადია თითოეული არგუმენტის მიმართ $h$ მიმართულებით და არსებობს შერეული წარმოებული $D_h^1D_h^2\beta(A_1\times A_2)$, მაშინ შემთხვევითი ფუნქცია $\mu(A,\omega)$, დიფერენცირებადია $h$ მიმართულებით.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$\gamma(s)=\frac{\mu(A+sh)-\mu(A)}{s} \tag{1.4.2}$$

ამ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\lim_{s,\sigma\to 0} E|\gamma(s)-\gamma(\delta)|^2=\lim_{s,\sigma\to 0}\big(E(\gamma(s)\gamma(s))-E(\gamma(s)\gamma(\delta))-E(\gamma(\delta)\gamma(s))+$$

$$+E(\gamma(\delta)\gamma(\delta))\big)=2\lim_{s,\delta\to 0}\big(E(\gamma(s)\gamma(s)\big)-2\lim_{s,\delta\to 0}\big(E(\gamma(s)\gamma(\delta)\big)$$

ამასთან

$$\lim_{s,\sigma\to 0}E(\gamma(s)\gamma(\delta))=\lim_{s,\sigma\to 0}\frac{E[\mu(A+sh)-\mu(A)][\mu(A+\delta h)-\mu(A)]}{s\delta}=$$

$$=\lim_{s,\sigma\to 0}\frac{\beta((A+sh)\times(A+\delta h))-\beta((A+sh)\times A)-\beta(A\times(A+\delta h))+\beta(A\times A)}{s\delta}=$$

$$=\lim_{s,\sigma\to 0}\left(\frac{1}{s}E\,\frac{\beta((A+sh)\times(A+\delta h)-\beta((A+sh)\times A)}{\delta}\right)- \tag{1.4.3}$$

$$-\lim_{s,\sigma\to 0}\left(\frac{1}{s}E\,\frac{\beta(A\times(A+\delta h))-\beta(A\times A)}{\delta}\right)=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{D_h^2\beta((A+sh)\times A)-D_h^2\beta(A\times A)}{s}=D_h^1D_h^2\beta(A\times A)$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{s,\sigma\to 0}E(\gamma(s)\gamma(s))=D_h^1D_h^2\beta(A\times A) \tag{1.4.4}$$

(1.4.2), (1.4.3) და (1.4.4) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ

$$\lim_{s,\sigma\to 0} E\left|\gamma(s)-\gamma(\delta)\right|^2 = 0$$

აქედან გამომდინარეობს რომ, არსებობს ისეთი ფუნქცია $\mu_h'(A)$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.4.1) ტოლობას.

თუ $\beta(A_1 \times A_2)$ დიფერენცირებადია თითოეული არგუმენტის მიმართ და არსებობენ შერეული წარმოებულები $h$ მიმართულებით, მაშინ

$$\lim_{s,\sigma\to 0} E(\gamma(s)\gamma(s)) = D_h^1 D_h^2 \beta(A \times A) \tag{1.4.5}$$

$$D_h^1 \beta(A_1 \times A_2) = E(\mu_h'(A_1)\mu(A_2)) \tag{1.4.6}$$

$$D_h^2 \beta(A_1 \times A_2) = E(\mu(A_1)\mu_h'(A_2)) \tag{1.4.7}$$

$$D_h^1 D_h^2 \beta(A_1 \times A_2) = E(\mu_h'(A_1)\mu_h'(A_2)) \tag{1.4.8}$$

მართლაც:

$$D_h^1 \beta(A_1 \times A_2) = \lim_{s\to 0} \frac{\beta((A_1 + sh)\times A_2) - \beta(A_1 \times A_2)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{E(\mu(A_1 + sh)\mu(A_1) - \mu(A_1)\mu(A_2))}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} E\left(\frac{\mu(A_1 + sh) - \mu(A_1)}{s} \cdot \mu(A_2)\right) = E(\mu_h'(A_1)\mu(A_2))$$

ანალოგიურად დამტკიცდება (1.4.7) და (1.48).

## §1.5. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა შემთხვევითი ზომებისათვის

ვთქვათ $\mu(\omega, A)$ $A \in \Re$, ნამდვილი, სკალარული, სასრულად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქციაა, ამასთან

$$E\mu(A) = 0, \qquad E\mu(A_1)\mu(A_2) = \beta(A_1 \times A_2)$$

$A, A_1, A_2 \in \Re$, ხოლო $\beta(A_1 \times A_2)$ თვლადად ადიციური და სიმეტრიული ზომაა.

**თეორემა 1.5.1.** თუ $\beta\big(A_1 \times A_2\big)$ $(A_1, A_2 \in \Re)$ დიფერენცირებადია თითოეული არგუმენტის მიმართ და არსებობენ შერეული წარმოებულები $h$ მიმართულებით, მაშინ ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია თავის წარმოებულთან ერთად, სამართლიანია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int_X \varphi(x)\mu'_h(dx) = -\int_X \varphi'_h(x)\mu(dx) \tag{1.5.1}$$

**დამტკიცება:** ჩავატაროთ გამოთვლები

$$\begin{aligned} &E\left[\int_X \frac{\varphi(x)(\mu(dx+sh)-\mu(dx))}{s} + \int_X \varphi'_h(x)\mu(dx)\right]^2 = \\ &= E\left[\frac{1}{s}\int_X \left(\varphi(x)(\mu(dx+sh) - \int_X \varphi(x)\mu(dx)\right) + \int_X \varphi'_h(x)\mu(dx)\right]^2 = \\ &= E\left[\int_X \frac{\varphi(x-sh)-\varphi(x))}{s}\mu(dx) + \int_X \varphi'_h(x)\mu(dx)\right]^2 = \\ &= E\left[\int_X \left(\frac{\varphi(x-sh)-\varphi(x))}{s} + \varphi'_h(x)\right)\mu(dx)\right]^2 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

მეორეს მხრივ

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_X \frac{\varphi(x)(\mu(dx+sh)-\mu(dx))}{s}-\int_X \varphi(x)\mu'_h(dx)\right]^2 = \\
&= E\iint_{XX} \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{s^2}(\mu(dx+sh)\mu(dy+sh)-2\mu(dx+sh)\mu(dy)+ \\
&+\mu(dx)\mu(dy))-2E\iint_{XX}\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{s}(\mu(dx+sh)\mu'_h(dy)- \\
&-\mu(dx)\mu'_h(dy))+\iint_{XX}\varphi(x)\varphi(y)D_h^1D_h^2\beta(dx\times dy)= \\
&=\iint_{XX}\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{s^2}(\beta(dx+sh)\times(dy+sh))-2\beta((dx+sh)\times dy)+ \\
&+\beta(dx\times dy))-2\iint_{XX}\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{s}\left(D_h^2\beta((dx+sh)\times dy)-D_h^2\beta(dx\times dy)\right)+ \\
&+\iint_{XX}\varphi(x)\varphi(y)D_h^1D_h^2\beta(dx\times dy)
\end{aligned}
\tag{1.5.3}
$$

თუ (1.5.2) და (1.5.3) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე მივიღებთ:

$$
\lim_{s\to 0} E\left[\int_X \frac{\varphi(x)(\mu(dx+sh)-\mu(dx))}{s}+\int_X \varphi'_h(x)\mu(dx)\right]^2 = 0\,,
$$

$$
\lim_{s\to 0} E\left[\int_X \frac{\varphi(x)(\mu(dx+sh)-\mu(dx))}{s}-\int_X \varphi(x)\mu'_h(dx)\right]^2 = 0\,,
$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1.5.1).

## §1.6. ზომათა ჰილბერტის სივრცე

$\Re$ ალგებრაზე განვიხლოთ სიმრავლეთა სკალარული ფუნქცია $\mu_\varphi(A)$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\mu_\varphi(A) = \langle \varphi, I_A \rangle = \iint_{XX} \varphi(x) I_A(y) \beta(dx \times dy) = \int_X \varphi(x) \beta(dx \times A)$$

სადაც $\varphi \in H$, ხოლო $I_A$ წარმოადგენს $A \in \Re$ სიმრავლის ინდიკატორს. განსაზღვრის თანახმად, სიმრავლეთა ფუნქცია - $\mu_\varphi(A)$, სასრულად ადიციურია.

ავღნიშნოთ $L$-ით ყველა $\mu_\varphi(A)$ $\quad (\varphi \in H, A \in \Im)$ ფუნქციათა სიმრავლე. ეს სიმრავლე წრფივია, რადგან

$$\mu_{\alpha\varphi+\gamma\psi}(A) = \langle \alpha\varphi + \gamma\psi, I_A \rangle = \alpha\langle \varphi, I_A \rangle + \gamma\langle \psi, I_A \rangle = \alpha\mu_\varphi(A) + \gamma\mu_\psi(A)$$

$$(\varphi, \psi \in H;\ \alpha, \gamma \in R;\ \ \varphi, \psi \in H)$$

$L$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ ჰილბერტის სივრცის სტრუქტურა. კერძოდ სკალარული ნამრავლი $(\cdot,\cdot)$ ასე განვსაზღვროთ

$$(\mu_\varphi, \mu_\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle = \iint_{XX} \varphi(x)\psi(y)\beta(dx \times dy) \qquad (\varphi, \psi \in H)$$

ამგვარად, ნებისმიერ $\varphi \in H$ ელემენტს შეესაბამება გარკვეული $\mu_\varphi \in L$ ელემენტი. ვაჩვენოთ, რომ ამ შესაბამისობისას $L$ სივრცის ნულოვან ელემენტს შეესაბამება $H$ სივრცის მხოლოდ ნულოვანი ელემენტი. დავუშვათ

$$\mu_\varphi(A) = \int_X \varphi(x)\beta(dx \times A) \equiv 0 \qquad (\varphi \in H, A \in \Im),$$

მაშინ, ნებისმიერი მარტივი $\psi \in H$ ფუნქციისთვის გვექნება

$$\int_X \psi(x)\mu_\varphi(dx) = \iint_{XX} \varphi(x)\psi(y)\beta(dx \times dy) = \langle \varphi, \psi \rangle = 0$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi = 0$.

ამგვარად ოპერატორი, რომელიც $\varphi$-ს ასახავს $\mu_\varphi$-ში შექცევადია. ჩვენთვის მოსახერხებელი იქნება, თუ ამ ოპერატორს ავღნიშნავთ $S^{-1}$ სიმბოლოთი,

$$S^{-1}\varphi = \mu_\varphi,$$

ხოლო მის შებრუნებულ ოპერატორს, რომელიც $L$-ს $H$-ში ასახავს, $S$-ით.

$$S\mu_\varphi = \varphi$$

ეს ოპერატორები უნიტარულნი არიან, რადგან

$$(\mu_\varphi, \mu_\psi) \overset{def}{=} \langle \varphi, \psi \rangle$$

ცხადია, რომ ყოველი $\mu_\varphi \in L$ ელემენტი წარმოადგენს $H$-ზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალს

$$(\mu_\varphi, \psi) = \int_X \psi(x)\mu_\varphi(dx)$$

ავირჩიოთ $H$ სივრცეში ორთონორმირებული ბაზისი $\{\varphi_k\}$ $(k=1,2,\ldots\infty)$, $\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle=\delta_{kj}$, მაშინ $L$ სივრცეში მას შეესაბამება $\{\mu_{\varphi_k}\}$ ელემენტთა ერთობლიობა, ამასთან

$$(\mu_{\varphi_k}\mu_{\varphi_j})=\delta_{k\,j}$$

რადგან ყოველი $\varphi\in H$ ელემენტი წარმოდგება ფურიეს მწკრივის სახით $\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$, სადაც $c_k=\langle\varphi,\varphi_k\rangle$, ამიტომ ყოველი $\mu_\varphi\in L$ ელემენტიც წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\mu_\varphi=S^{-1}\varphi=S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}c_kS^{-1}\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mu_{\varphi_k}$$

ცხადია, რომ

$$c_k=(\mu_\varphi,\mu_{\varphi_k})=(\mu_\varphi,\varphi_k)=(\varphi,\mu_{\varphi_k})$$

როცა სიმრავლეთა ფუნქცია $\beta(A_1\times A_2)$ $(A_1,A_2\in\Re)$ სასრული ვარიაციისაა, მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ იგივე თვისება ექნება $\mu_\varphi(A)$ $(\varphi\in H)$ ფუნქციასაც.

მართლაც, იმის გამო, რომ $\mu_\varphi(A)$ ფუნქცია სასრულად ადიციურია, ამიტომ მისი სასრული ვარიაციულობისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ იგი უწყვეტია ზემოდან ნულში.

რადგან $\mu_\varphi(A)=\langle\varphi,I_A\rangle$, ამიტომ

$$\left|\mu_\varphi(A)\right|^2\le\langle\langle\varphi\rangle\rangle^2\langle\langle I_A\rangle\rangle^2=\langle\langle\varphi\rangle\rangle^2\beta(A\times A)$$

აქედან კი გამომდინარეობს $\mu_\varphi(A)$ ფუნქციის უწყვეტობა ნულში.

ვთქვათ, $Q$ $(Q\ge I)$ ჩაკეტილი დადებითად განსაზღვრული წრფივი ოპერატორია $H$ ჰილბერტის სივრცეში, რომლის შებრუნებული $Q^{-1}$ ჰილბერტ-შმიდტის ოპერატორია, ხოლო $\{\varphi_k\}$ $(k=1,2,\ldots\infty)$ $Q$ არის ოპერატორის საკუთრივ ვექტორთა სრული სისტემაა

$$Q\varphi_k=\lambda_k\varphi_k$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}<\infty$$

ჩვეულებრივი წესით ავაგოთ ჰილბერტ-შმიდტის სტრუქტურა

$$H_+\subset H\subset H_-$$

სადაც $H_+$ წარმოადგენს $Q$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს ნორმით

$$\|\varphi\|_+=\langle\langle Q\varphi\rangle\rangle\qquad(\varphi\in H_+)\tag{1.6.1}$$

ხოლო $H_-$ წარმოადგენს $H$ სივრცის გასრულებას ნორმით

$$\|\psi\|_-=\langle\langle Q^{-1}\psi\rangle\rangle\qquad(\psi\in H)\tag{1.6.2}$$

ამასთან, შესაძლებელია $Q$ ოპერატორის ჩაკეტვა $Q$, რომელიც მოქმედებს $H$-დან $H_-$-ში, ხოლო შებრუნებული ოპერატორი $Q^{-1}$ ასახავს $H_-$-ს $H$-ში და წარმოადგენს $Q^{-1}$-ის გაფართოებას, ამასთანავე (1.6.2) ფორმულა ვრცელდება $H_-$-ის ყოველ ელემენტზე

$$\|\xi\|_- = \left\langle\left\langle Q^{-1}\xi\right\rangle\right\rangle \qquad (\xi \in H_-)$$

(1.6.1) და (1.6.2) ფორმულებიდან გამოდის, რომ $Q$ და $Q^{-1}$ უნიტარული ოპერატორებია.

$H_+$ და $H_-$ სივრცეებს შორის არსებობს ბინალური მიმართება:

$$(\varphi,\xi) = \left\langle Q\varphi, Q^{-1}\xi\right\rangle \qquad (\varphi \in H_+, \xi \in H_-)$$

შევნიშნოთ, რომ $(\varphi,\xi)$ ფორმა წარმოადგენს სკალარული ნამრავლის გაფართოებას $H$-ში, $H \times H$-დან $H_+ \times H_-$-ზე.

ახლა ავაგოთ ჰილბერტის სტრუქტურა $L_+ \subset L \subset L_-$ ისე, რომ კომუტაციური იყოს შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc} H_+ & \xrightarrow{Q} & H & \xrightarrow{Q} & H_- \\ S^{-1}\downarrow & & & & S^{-1}\downarrow \\ L_+ & \xrightarrow{q} & L & \xrightarrow{q} & L_- \end{array}$$

დიაგრამის მარცხენა მხარიდან გამოდის, რომ ოპერატორი $q$ უნდა განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით

$$qS^{-1} = S^{-1}Q,$$

ხოლო $L_+$ სივრცე ფორმულიდან

$$L_+ = S^{-1}H_+$$

ამგვარად, $L_+$ სივრცე შედგება ისეთი $\mu_\varphi \in L$ ელემენტებისაგან რომელთათვისაც $\varphi \in H_+$ და

$$\mu_\varphi(A) = \int_X \beta(A \times dx) \qquad (A \in \Re),$$

ხოლო, თუ $\mu_\varphi$-ს გავშლით ბაზისის მიმართ გვექნება

$$\mu_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{\varphi_k}, \qquad c_k = (\mu_\varphi, \mu_{\varphi_k}) \qquad (k = 1,2,\ldots). \tag{1.6.3}$$

სადაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k \lambda_k\right|^2 < \infty$$

$\mu_{\varphi_k}$-ზომები წარმოადგენენ $q$ ოპერატორის საკუთრივ ელემენტებს

$$q\mu_{\varphi_k} = qS^{-1}\varphi_k = S^{-1}Q\varphi_k = \lambda_k S^{-1}\varphi_k = \lambda_k \mu_{\varphi_k} \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

$q$ ოპერატორი ცალსახად განსაზღვრავს $L_-$ სივრცეს. თუ გამოვიყენებთ ბაზისის მიმართ გაშლას, მისი ელემენტები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\mu_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{\varphi_k} \qquad c_k = (\mu_\xi, \mu_{\varphi_k}) \qquad (k = 1,2,\ldots) \tag{1.6.4}$$

სადაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right|^2 < \infty$$

$\mu_\xi \in L_-$ წარმოადგენს განზოგადებულ ზომას და იგი არის წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი $H_+$-ზე, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$(\varphi, \mu_\xi) = \int_X \varphi(x) \mu_\xi(dx) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \mu_{\varphi_k})$$

სადაც, მარჯვნივ მდგომი მწკრივი კრებადია (1.6.3) და (1.6.4)-ის ძალით. ამავე დროს, ყოველი $\mu_\xi \in L_+$ წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს $H_-$-ზე.

## §1.7. შემთხვევითი ზომის რეალიზაციის სივრცე

ვთქვათ $\mu(\omega, A)$ $A \in \Re$, ნამდვილი, სკალარული, სასრულად ადიციური სიმრავლეთა ფუნქციაა, ამასთან

$$E\mu(A) = 0, \quad E\mu(A_1)\mu(A_2) = \beta(A_1 \times A_2)$$

$A, A_1, A_2 \in \Re$, ხოლო $\beta(A_1 \times A_2)$ თვლადად ადიციური და სიმეტრიული ზომაა.

გავშალოთ $\mu$ შემთხვევითი ელემენტი $L$ სივრცის $\{\mu_{\varphi_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ბაზისის მიმართ

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k$$

აქ $c_k$ $(k = 1,2,..)$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$c_k = (\mu, \mu_{\varphi_k}), \qquad Ec_k = 0, \qquad Ec_k c_j = \delta_{kj}$$

მართლაც,

$$Ec_k = E(\mu, \mu_{\varphi_k}) = E\int_X \varphi_k(x)\mu(dx) = \int_X \varphi_k(x)E\mu(dx) = 0$$

$$Ec_k c_j = E(\mu, \mu_{\varphi_k})(\mu, \mu_{\varphi_j}) = \iint_{XX} \varphi_k(x)\varphi_j(y)\beta(dx \times dy) =$$

$$= \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = (\mu_{\varphi_k}, \mu_{\varphi_j}) = \delta_{kj}$$

$L_-$ სივრცეში შემოვიღოთ ცილინდრული ფუნქციები

$$C_{A_1, A_2, \dots A_n}(\Gamma) = \{\theta : (\theta(A_1), \theta(A_2) \dots, \theta(A_n)) \in \Gamma\}$$

სადაც $\theta \in L_-$, $\Gamma$ - ბორელის სიმრავლეა $R^n$-ში.

$L_-$ სივრცის ცილინდრულ სიმრავლეებზე შემოვიღოთ ზომა

$$m(C_{A_1, A_2, \dots A_n}(\Gamma)) = P\{\omega : (\mu(\omega, A_1), \mu(\omega, A_2) \dots, \mu(\omega, A_n)) \in \Gamma\}$$

ამ ზომის კორელაციური ოპერატორის შეზღუდვა $L$ სივრცეზე წარმოადგენს იგივურ ოპერატორს, რადგან

$$E(\mu, \varsigma_1)(\mu, \varsigma_2) = E \sum_{k_1, k_2, j_1, j_2} c_{k_1} c_{k_2} \alpha_{k_2} \gamma_{j_2} (\mu_{\varphi_{k_1}} \varphi_{k_2})(\mu_{\varphi_{j_1}} \varphi_{j_2}) =$$

$$= \sum_{k,j} \gamma_k \alpha_j Ec_k c_j = \sum_k \gamma_k \alpha_k = \langle \varsigma_1, \varsigma_2 \rangle = (\mu_{\varsigma_1} \mu_{\varsigma_2})$$

სადაც $\varsigma_1 = \sum_k \gamma_k \varphi_k \in H$, $\varsigma_2 = \sum_k \alpha_k \varphi_k \in H$.

რადგან, $L_-$ წარმოადგენს $L$ სივრცის ჰილბერტ-შმიდტის გაფართოვებას, ამიტომ კოლმოგოროვის თეორემით $\nu$ ზომა, რომელიც წარმოადგენს $m$ ალბათური ზომის $\sigma$-ადიციურ გაგრძელებას, თავმოყრილია $L_-$-სივრცეში. შევნიშნოთ აგრეთვე რომ

$$E\|\mu\|_- = E\sum_k \left(\frac{c_k}{\lambda_k}\right)^2 = \sum_k \left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) Ec_k^2 = \sum_k \left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) < \infty .$$

განვიხილოთ წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი $L_-$ სივრცეზე, რომელიც განისაზღვრება $\varphi \in H_+$ ელემენტით

$$l(\mu) = \int_X \varphi(x)\mu(dx)$$

რადგან $\mu(\omega, A)$ შემთხვევითი ფუნქციის თითქმის ყველა რეალიზაცია $L_-$ სივრცეშია, ჩვენ შეგვიძლია $l(\mu)$ განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი სიდიდე, ცხადია, $El(\mu) = 0$ ვიპოვოთ მეორე მომენტი

$$E|l(\mu)|^2 = E\int_X \varphi(x)\mu(dx) \cdot \int_X \varphi(x)\mu(dx) =$$
$$= \iint_{XX} \varphi(t)\varphi(\tau)\beta(dt \times d\tau) = \|\varphi\|_H \tag{1.7.1}$$

ამრიგად წრფივი ფუნქციონალის მეორე რიგის მომენტი გამოისახება $\varphi$ ფუნქციის ნორმით $H$-ში და არა $H_+$ სივრცეში. ეს საშუალებას გვაძლევს გავავრცოთ ეს ფუნქციონალი $H$ სივრცეზე.

ვთქვათ $\varphi \in H$. განვიხილოთ მისკენ კრებადი $\varphi_n \in H_+$ მიმდევრობა, მაშინ

$$l_n(\mu) = \int_X \varphi_n(x)\mu(dx)$$

(1.7.1) ფორმულიდან გამოდის, რომ ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია საშუალო კვადრატული აზრით, რადგან

$$E|l_n(\mu) - l(\mu)|^2 = \|\varphi_n - \varphi\|_H^2$$

აქედან გამომდინარე, განისაზღვრება შემთხვევითი სიდიდე $l(\mu) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.} l_n(\mu)$, ადვილი საჩვენებელია, რომ იგი არაა დამოკიდებული აპროქსიმირებადი მიმდევრობის შერჩევაზე. ეს ფუნქციონალი, რომელსაც ჩვენ ისევ ავღნიშნავთ როგორც $l(\mu) = \int_X \varphi(x)\mu(dx)$, განსაზღვრულია თითქმის ყველგან $L_-$ სივრცეზე და წრფივია იმ აზრით, რომ

$$l(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 l(\mu_1) + \alpha_2 l(\mu_2) \qquad (\text{თ. ყ.}) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R^1)$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა: 1.7.1** სიმრავლეთა შემთხვევითი ადიციური ფუნქცია $\mu(\omega, A)$, რომელსაც გააჩნია მეორე რიგის $\sigma$-ადიციური კორელაციური ზომა $\beta(A_1 \times A_2)$, რეალიზდება როგორც შემთხვევითი წრფივი ფუნქციონალი $(\varphi, \mu)$ $H$ სივრცეზე, უწყვეტია საშუალო კვადრატული აზრით და მიეკუთვნება $L_-$ სივრცეს თითქმის ყველგან $(\mathrm{mod}(P))$

# თავი 2

## შემთხვევითი ზომების ზოგიერთი გამოყენება

ამ ნაწილში მოგვყავს შემთხვევითი ზომების ზოგიერთი, გამოყენებითი ხასიათის შედეგი. კერძოდ, მიღებულია იაკობის თეორემა შემთხვევითი ზომის არაწრფივი გარდაქმნისათვის და გამოთვლილია რადონ ნიკოდიმის სიმკვრივის ფორმულა. ამასთან სიმკვრივის ფორმულაში ფიგურირებს გაფართოებული სტოქასტური ინტეგრალი. მოყვანილია მიღებული შედეგების გამოყენება თერმოდინამიკის კლასიკური განტოლების ამონახსნის საშუალოს შეფასებისათვის. შესწავლილია აბსოლუტურად უწყვეტობის საკითხი ერთი ზოგადი ხასიათის სასაზღვრო ამოცანისათვის შემთხვევითი "ხმაურით". თავის ბოლო ნაწილი ეხება დიფერენციალური განტოლებების საწყისი განაწილების სტატისტიკურ შეფასებას, ინტერვალის ბოლოს არსებულ დაკვირვებათა საფუძველზე.

## §2.1 შემთხვევითი ზომის გარდაქმნა ვექტორული ველის გასწვრივ

ქვემოთ, ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $(\Omega, \Lambda, \mathrm{P})$ ფიქსირებული ალბათური სივრცეა. ვთქვათ, $\mu(\omega, A)$ ნამდვილი, შემთხვევითი, თითქმის ყველგან $\sigma$-ადიციური სიმრავლეთა შემთხვევითი ფუნქციაა რაიმე $\{X, B(X)\}$ სივრცეზე. ვიგულისხმოთ, რომ $E\mu(A)=0$ და არსებობს $\sigma-$ადიციური უწყვეტი ზომა $\beta(A_1 \times A_2) = E\mu(A_1)\mu(A_2)$, განსაზღვრული $\{X \times X, B(X) \times B(X)\}$-ზე. ვთქვათ, $H$ ნამდვილი, ზომადი $\varphi$ ფუნქციების სივრცეა $\{X, B(X)\}$-ზე, სკალარული ნამრავლით:

$$(\varphi, \psi) = \iint_{XX} \varphi(x)\psi(x)\beta(dx \times dy) = E\int_X \varphi(x)\mu(dx)\int_X \psi(y)\mu(dy)$$

ისე, როგორც პირველ თავში ავაგოთ $H$ სივრცის შეუღლებული $H^*$ სივრცე, რომელიც წარმოადგენს $\mu=\mu_\varphi=S_\varphi$ ზომების სივრცეს, სადაც $S$ უნიტარული ოპერატორია

$$S: H \to H^*$$

და

$$\mu_\varphi(A)=\int_X \varphi(x)\beta(dx\times A),$$

ასე, რომ $H$ და $H^*$ სივრცის ელემენტების დაწყვილება ხდება შემდეგნაირად:

$$\left\langle \psi,\mu_\varphi\right\rangle=\langle\psi,S\varphi\rangle=(\psi,\varphi)$$

აქედან ცხადია, რომ $H$-იც იქნება ჰილბერტის სივრცე, სკალარული ნამრავლით

$$\left(\nu_\varphi,\nu_\psi\right)_*=(\varphi,\psi)$$

როგორც უკვე ვნახეთ (§1.6), შეგვიძლია ავაგოთ ჩართვის ოპერატორი $Q$ და ჰილბერტის სივრცე $H_+$ რომელიც მკვრივია $H$-ში, ისეთი რომ $Q$ ჰილბერტ-შმიდტისაა და სამართლიანია დიაგრამა

$$H_+\overset{Q}{\subset}H\overset{S}{=}H^*\overset{Q}{\subset}H_- \tag{2.1.1}$$

ამასთან, განაწილება $\widetilde{\mu}(\Delta)=\widetilde{\mu}_A(\Delta)\overset{def}{=}P\{\nu(A)\in\Delta\}$ თავმოყრილია $H_-$-ში. ვთქვათ, $L(M,N)$ არის იმ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა სივრცე, რომელებიც განსაზღვრულია $M$-ზე და დიფერენცირებადი არიან $N\left(N\subset M\right)$ სიმრავლის მუდმივი ელემენტების გასწვრივ. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $\widetilde{\mu}$ განაწილება წარმოადგენს გლუვ ზომას $H_-$-ში (იხ. [34]). ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს გლუვი ფუნქცია $\lambda: H_-\to H_-$, რომელსაც $\widetilde{\mu}$ ზომის ლოგარითმული წარმოებული ეწოდება, ისეთი, რომ ყოველი $f\in L(H_-,H_+)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\int_{H_-}<\varphi,f'(\mu)>\tilde{\mu}(d\mu)=-\int_{H_-}f(\mu)<\varphi,\lambda(\mu)>\tilde{\mu}(d\mu)$$

$<\varphi,\lambda(\mu)>$ გამოსახულებას ვუწოდებთ გაფართოებულ სტოქასტურ ინტეგრალს. შემოვიღოთ მისთვის უფრო მოსახერხებელი აღნიშვნა

$$\int_X \varphi(x)\lambda(\mu)(dx) \tag{2.1.2}$$

ეს ფორმულა შეიძლება გავავრცელოთ $\varphi(x,\mu)\in H_+$ შემთხვევით ფუნქციებზეც და ასეთი ფუნქციებისათვის იგი ფორმალურად ასე ჩაიწერება:

$$<\lambda(\mu)+D,\varphi(x,\mu)>\overset{def}{=}\int_X \varphi(x,\mu)\lambda(\mu)(dx)+div\varphi(x,\mu)$$

(2.1.2) ინტეგრალს გავრცელებულს გლუვ $\varphi(x,\mu)\in H$ ფუნქციებზე კვლავ ვუწოდებთ გაფართოებულ სტოქასტურ ინტეგრალს და ასე ავღნიშნავთ:

$$\int_X \varphi(x,\mu)\lambda(\mu)(dx)=\left\langle\lambda+D,\varphi(x,\mu)\right\rangle \tag{2.1.3}$$

**თეორემა 2.1.1** (იხ. [19]) გლუვ $\varphi(x,\mu)\in H$ ფუნქციებზე გავრცელებული (2.1.3) გაფართოებული სტოქასტური ინტეგრალი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$E\left|\left\langle \lambda + D,\varphi\right\rangle\right|^2 \le const\left\{\|\varphi\|_H^2 + tr_H \varphi'^2\right\}$$

და სამართლიანი შემდეგი თვისებები:

1) $E\left\langle \lambda + D,\varphi\right\rangle = 0$

2) $E\left|\left\langle \lambda + D,\varphi\right\rangle\right|^2 = E\left\{\left(\lambda'(\mu)\varphi,\varphi\right) + tr\varphi'^2\right\}$

3) $E\left\langle \varphi, D\right\rangle\psi = -E\psi\left\langle \lambda + D,\varphi\right\rangle$.

განვიხილოთ სივრცეების ჰილბერტის სტრუქტურა:

$$H_+ \subset H \subset H_-$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\mu$ შემთხვევითი ზომის $\widetilde{\mu}$ განაწილება თავმოყრილია $H_-$-ში. ვთქვათ, $\widetilde{\mu}$ გლუვი ზომაა $H_-$-ში, ე.ი. არსებობს ლოგარითმული წარმოებული $\lambda(\mu)$, $H_+$-სივრცის მუდმივი ელემენტების მიმართულებით, მაშინ ასეთ $\widetilde{\mu}$-ს გააჩნია ასეთი სახის ლოგარითმული წარმოებული

$$\rho_{\widetilde{\mu}}\left(z,\mu\right) = <\lambda\left(\mu\right), z\left(\mu\right)> + trz'\left(\mu\right)$$

$z(\mu): H_- \to H_+$ ვექტორული ველის მიმართ.

ვთქვათ $u_{ts}$, $t,s\in\left(\alpha,\beta\right)$ ინტეგრალური ნაკადია, შეთანხმებული $z(\mu,t)$ ვექტორულ ველთან. ე.ი.

$$\frac{du_{ts}\mu}{\partial t} = z\left(u_{ts}\mu, t\right), \qquad u_{\tau\tau}\mu = \mu$$

და $\widetilde{\mu}_t = \widetilde{\mu}\cdot u_{tt_0}^{-1}$. შამართლიანია

**თეორემა 2.1.2.** ([41]). თუ $z(\mu,t)$ დიფერენცირებადია $\mu$-ს მიმართ და $z'_\mu(\mu,t): H_0 \to H_0$, $z(\mu,t)\in H_0$ ყოველი $t$ და $\mu$-თვის, ხოლო $\widetilde{\mu}$-ს გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული

$$\rho_{\widetilde{\mu}}(\varphi,\mu) = <\lambda(\mu),\varphi>$$

$H_+$-სივრცის მუდმივი ველების მიმართ, მაშინ ყველა $\mu_t$-ზომა ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$\frac{d\widetilde{\mu}_t}{d\widetilde{\mu}_\tau}(\mu) = \exp\left\{-\int_\tau^t\left[<\lambda\left(u_{st_0}^{-1}\mu\right), \upsilon_s\left(u_{st_0}^{-1}\mu\right)> + tr\frac{d\nu_s}{d\mu}\right]d\nu\right\} \tag{2.1.4}$$

სადაც $\upsilon_t\left(\mu\right) = -\left(u'_{tt_0}\right)^{-1} z\left(t,\mu\right)$.

$H$ სივრცეში განვიხილოთ განტოლება

$$\Im\left(t,\nu,\mu_t\right) = 0, \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \tag{2.1.5}$$

სადაც $\nu$ $H_-$ სივრცის მუდმივი ელემენტია (ზომაა), ხოლო $\mu = \mu_t$ კი, რაიმე წირი. ვიგულისხმოთ, რომ (2.1.5) განტოლებაში $\Im$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სიგლუვის შესაბამის პირობებს. გვექნება:

$$\frac{\partial \Im}{\partial t}+\frac{\partial \Im}{\partial \mu}\mu_t^{'}=0, \qquad \mu_t^{'}=-\left(\frac{\partial \Im}{\partial \mu}\right)^{-1}\frac{d\Im}{dt}$$

და თუ ვექტორულ ველად ავიღებთ

$$z(t,\mu_t)=-\left(\frac{\partial \Im}{\partial \mu}\right)^{-1}\frac{\partial \Im}{\partial t},$$

მაშინ მივიღებთ

$$\frac{d\mu_t}{dt}=z(t,\mu_t)$$

ამ შემთხვევაში $\mu_t=u(t,0,\nu)$ იქნება $z$-ის ინტეგრალური ნაკადი. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ (2.1.5) ამოხსნადია $\nu$-ს მიმართ და

$$\nu=\Phi(t,\mu_t)$$

ჩავატაროთ გამოვთვლები

$$u^{-1}(t,0,\mu_t)=\Phi(t,\mu_t),\left(u^{-1}\right)^{'}=\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(t,\mu_t)$$

$$\upsilon(\nu)=-(\dot{u})_z^{-1}=-\Phi_\mu^{-1}(t,\mu_t)\Im_\mu^{'}(t,\nu,\mu_t)^{-1}\Im_t^{'}(t,\nu,\mu_t)$$

მაგრამ, რადგან

$$\Im\big(t,\Phi(t,\mu_t),\mu_t\big)\equiv 0,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}+\frac{\partial \Im}{\partial \mu}=0,$$

აქედან

$$\frac{\partial \Im}{\partial \nu}(t,\nu,\mu_t)^{-1}=-\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(t,\mu_t)\frac{\partial \Im}{\partial \mu}(t,\nu,\mu_t)^{-1}$$

და

$$\upsilon(\nu)=\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial \Im}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(t,\mu_t)=-\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial \Im}{\partial \mu}.$$

ასევე გვექნება

$$-\upsilon^{'}(\nu)\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial \Im}{\partial \mu}=\left(-\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \Im}{\partial \nu\partial \mu}\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial \Im}{\partial t}+\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \Im}{\partial t\partial \mu}$$

საიდანაც

$$-\upsilon^{'}(\nu)=\left(\frac{\partial \Im}{\partial \nu}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \Im}{\partial \nu\partial \mu}\frac{\partial \Im}{\partial t}\left(\frac{\partial \Im}{\partial \mu}\right)^{-1}-\frac{\partial^2 \Im}{\partial t\partial \mu}\left(\frac{\partial \Im}{\partial \mu}\right)^{-1}.$$

თუ ახლა ამ გამოთვლებთან ერთად გამოვიყენებთ თეორემა 2.1.2.-ს შეგვიძლია დავწეროთ

**თეორემა 2.1.3.** თუ (2.1.5) განტოლებაში $\Im(t,\nu,\mu_t)$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი წარმოებულები $\frac{\partial \Im}{\partial \nu},\frac{\partial \Im}{\partial t},\frac{\partial \Im}{\partial \mu},\frac{\partial^2 \Im}{\partial t\partial \mu}$ და $\frac{\partial^2 \Im}{\partial \nu\partial \mu}$, ხოლო ასახვა

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\nu}\frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial\nu\partial\mu}\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial t\partial\mu}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\mu}\right)^{-1}$$

წარმოადგენს ბირთვულ ოპერატორს, მაშინ ზომები $\widetilde{\mu}_t$ ექვივალენტურნი არიან და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{d\tilde{\mu}_t}{d\tilde{\mu}_\tau}(\mu)=\exp\left\{-\int_\tau^t\left[<\lambda\left(\Phi\left(s,\mu\right)\right),\left(\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\nu}\right)^{-1}\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial t}>-tr\left(\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\nu}\frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial\nu\partial\mu}\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial t\partial\mu}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\mu}\right)^{-1}\right]ds\right\}$$

**შენიშვნა 2.1.1.** ეს ფორმულა უფრო მარტივად ჩაიწერება $\Phi$ ფუნქციის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში

$$\mathfrak{I}(t,\nu,\mu)=\nu-\Phi(t,\mu),\qquad \frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\nu}=\mathrm{I},\qquad \frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial t}=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,\mu),$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial\nu\partial\mu}=0,\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{I}}{\partial t\partial\mu}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\mu},\qquad \frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial\mu}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\mu},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{d\tilde{\mu}_t}{d\tilde{\mu}_\tau}(\mu)=\exp\left\{\int_\tau^t\left[<\lambda(\Phi(s,\mu)),\Phi_t'(s,\mu)>+tr\Phi_{t\mu}''(\Phi_\mu')^{-1}\right]ds\right\}\tag{2.1.6}$$

## §2.2. შემთხვევითი ზომის არაწრფივი გარდაქმნა

განვიხილოთ ჰილბერტის სტრუქტურა

$$H_+ \subset H \subset H_- \qquad (2.2.1)$$

და ზომა $\widetilde{\mu}$ განსაზღვრული $H_-$ სივრცეზე, რომელსაც გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული $H_+$-სივრცის მუდმივი ელემენტების მიმართულებით

$$<\lambda(\mu),\varphi>, \qquad \lambda(\mu): H_- \to H_-, \qquad \varphi \in H_+$$

გამოვიკვლიოთ $\widetilde{\mu}$ ზომის არაწრფივი გარდაქმნის საკითხი $H_-$-ში.

**თეორემა 2.2.1.** ვთქვათ, (2.2.1) წარმოადგენს $H$ ზომათა სივრცის ჰილბერტის სტრუქტურას, ხოლო $\widetilde{\mu}$ გლუვი ზომაა $H_-$-ზე, რომლის ლოგარითმული წარმოებულია

$$\rho_{\widetilde{\mu}}(\varphi,\mu) = <\lambda(\mu),\varphi>.$$

ვთქვათ $f: H_- \to H_-$ შექცევადი გარდაქმნაა, რომლის შექცეულიც მოიცემა ფორმულით:

$$f^{(-1)}: \mu \to \nu = \mu + F(\mu)$$

ამასთან შესრულებულია პირობები:

1) $F: H_- \to H_+$ უწყვეტი დიფერენცირებადი ასახვაა;

2) $I + tF'(\mu)$ წრფივ ოპერატორს გააჩნია შემოსაზღვრული შექცეული , როცა $0 \le t \le 1$, $\mu \in H$ .

მაშინ ზომები $\widetilde{\mu}$ და $\widetilde{\widetilde{\mu}} = \widetilde{\mu} f^{(-1)}$ ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს სახე:

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\mu}}}{d\widetilde{\mu}}(\mu) = \det(I + F'(\mu))\exp\left\{\left\langle \int_0^1 \lambda(\mu + tF(\mu))dt, F(\mu)\right\rangle\right\} \qquad (2.2.2)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ჰომოტოპია

$$\Phi(t,\mu) = \mu + tF(\mu), \qquad 0 \le t \le 1,$$

რომელიც $\mu$-ს აკავშირებს $\mu + tF(\mu)$-თან. გამოვიყენოთ თეორემა 2.2.1. და (2.1.6) ფორმულა. ამ შემთხვევაში

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(\mu), \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \mu} = F'(\mu), \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right)^{-1} = [I + tF'(\mu)]^{-1}.$$

თეორემის პირობით $\widetilde{\widetilde{\mu}} \sim \widetilde{\mu}$ და (2.1.6) ფორმულიდან გვექნება

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\mu}}}{d\widetilde{\mu}}(\mu) = \exp\left\{\left\langle \int_0^1 \lambda(\mu + tF(\mu))dt, F(\mu)\right\rangle + \int_0^1 trF'(\mu)[I + tF'(\mu)]^{-1} dt\right\}$$

თუ ვისარგებლებთ გურსა-ვრონსკის ცნობილი ფორმულით, რომლის თანახმადაც

$$\int_0^1 tr(I+tR)^{-1}Rdt = \ln\det(I+R)$$

მივიღებთ (2.2.2)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

**მაგალითი 2.2.1.** თუ $\widetilde{\mu}$ გაუსის კანონიკური ზომაა $H_{-}$-ში, მაშინ $\lambda(\mu)=-\mu$ და (2.7)-დან ვღებულობთ

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\mu}}}{d\widetilde{\mu}}(\mu)=\det(I+F'(\mu))\exp\left\{-<\mu_1 F(\mu)>-\frac{1}{2}\|F(\mu)\|^2\right\} \tag{2.2.3}$$

**შენიშვნა 2.2.1.** ვთქვათ, $\widetilde{\mu}$ გაუსის ზომაა ნულოვანი საშუალოთი და $R$ ბირთვული კორელაციური ოპერატორით $H_0$-ში

$$R=\int_X\int_X E\mu(t)\,\mu(z)\,\beta(dt\times dz)$$

მაშინ, $\lambda(\mu)=-R^{-1}\mu$. ამ შემთხვევაში გამოსახულება

$$\left(f(\mu),S\mu\right)_0 - TrS^* f'(\mu)R,$$

სადაც $S$ წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორია, შეიძლება მაშინაც ჩავწეროთ, როცა $f'(\mu)$ შემოსაზღვრულია და $RS^*$ ჰილბერტ-შმიდტისაა. კერძოდ, ავიღოთ $S=R^{-\frac{1}{2}}$ და ავღნიშნოთ

$$l^{(R)}(f)(\mu)=(f(\mu),R^{-\frac{1}{2}}\mu)-trf'(\mu)R^{\frac{1}{2}}$$

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები (თეორემა 2.1.1), ეს გამოსახულება შეიძლება გავრცელდეს როგორც გაფართოვებული სტოქასტიკური ინტეგრალი. ამიტომ თეორემის პირობებში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\mu}}}{d\widetilde{\mu}}(\mu)=\det(I+F'(\mu))\exp\left\{-\int_X F'(\mu)\left(R^{-\frac{1}{2}}\mu\right)(d\mu)-\frac{1}{2}\|F(\mu)\|^2\right\} \tag{2.2.4}$$

სადაც $\det(I+T)$- რეგულიარიზებული დეტერმინანტია (იხ. []), რომელიც ასე განისაზღვრება

$$\det(I+T)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)e^{-\lambda_k},$$

ხოლო $T$ არის ჰილბერტ-შმიდტის ტიპის ოპერატორი, $\{\lambda_k\}$ მისი საკუთრივი რიცხვებია.

ამ თეორემისა და (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) ფორმულების გამოყენებით შეიძლება შესწავლილი იქნას ზომათა განაწილებები, რომლებიც წარმოადგენენ ზომებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებს შემთხვევითი შესაკრებებით.

**მაგალითი 2.2.2.** ( შემთხვევითი ზომის ცილინდრული ტიპის გარდაქმნა)

მრავალი ამოცანას, რომელიც დაკავშირებულია ზომის შემცველ განტოლებებთან უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში, მივყავართ ინტეგრალური ტიპის გარდაქმნებამდემდე. ამ მაგალითში განხილულია ზომათა ექვივალენტობის საკითხები არაწრფივი გარდაქმნისას, რომელსაც ინტეგრალური სახე აქვს და დამოკიდებულია საწყისი $\sigma$ -ალგებრის ფიქსირებულ ელემენტებზე.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $\{\Omega, \Im, P\}$ ფიქსირებული ალბათური სივრცეა. $Q_m$ კი $m$ განზომილებიანი კუბი $Q_m = \mathop{X}\limits_{k=1}^{m}[0,1] = [0,1]^m$; $\nu_m$ იყოს $Q_m$-ის ქვესიმრავლეთა ბორელის ზომა. ხოლო $\{X, \mathrm{B}\}$ რაიმე ზომადი სივრცე.

განვიხილოთ $Q_m \times \mathrm{B} \times \Omega$ სიმრავლეზე ნამდვილმნისვნელობებიანი შემთხვევითი ზომები $\mu(t,A) = \mu(t,A,\omega)$, რომელთაც გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1) $\mu$ შემთხვევითი სიდიდეა ფიქსირებული $t \in Q_m$ და $A \in \mathrm{B}$-თვის; $E\mu^2(t,A) < \infty$ თ. ყ. ლებეგის ზომით, როცა $t \in Q_m$ და $A \in \mathrm{B}$

2) ფიქსირებული $t \in Q_m$-თვის, $\mu(t,A)$ ნიშანცვლადი ზომაა თითქმის ყველა $\omega$-თვის

3) ფიქსირებული $A \in \mathrm{B}$-თვის $\mu$ კვადრატით ინტეგრებადია $\nu_m(dt)$ ზომით, ალბათობით 1.

$\widetilde{L}_2(Q_m)$-ით ავღნიშნოთ $\mu(t,A)$ შემთხვევით ზომათა სივრცე, რომელსაც გააჩნია 1), 2) და 3) თვისებები. ცხადია, რომ $\widetilde{L}_2(Q_m)$ წარმოადგენს ჰილბერტის სივრცეს სკალარული ნამრავლით $(\mu_1, \mu_2)_{\widetilde{L}_2(Q_m)} = E\int\limits_{Q_m} \mu_1(t,X)\mu_2(t,X)\nu_m(dt)$ და შესაბამისი $\|\mu\|^2_{\widetilde{L}_2(Q_m)} = \quad = E\int\limits_{Q_m} \mu^2(t,X)\nu_m(dt)$ ნორმით. შემოვიღოთ ურთიერთ კორელაციური ზომა $\beta_{ts}^{\mu_1\mu_2}(A,B) = E\mu_1(t,A)\mu_2(s,B)$. ამ ზომის საშულებით $(\mu_1, \mu_2)_{\widetilde{L}_2(Q_m)} = \int\limits_{Q_m} \beta_{tt}^{\mu_1\mu_2}(X,X)\nu_m(dt)$ და $\|\mu\|^2_{\widetilde{L}_2(Q_m)} = \int\limits_{Q_m} \beta_{tt}^{\mu\mu}(X,X)\nu_m(dt)$

დაუშვათ $\widetilde{L}_2^{+}(Q_m) \subset \widetilde{L}_2(Q_m) \subset \widetilde{L}_2^{-}(Q_m)$ წარმოადგენს $\widetilde{L}_2(Q_m)$ ძირითადი სივრცის კვაზიბირთვულ გაფართოებას. განვიხილოთ გარდაქმნა $\widetilde{L}_2(Q_m)$-ში

$$\widetilde{\mu}(A,t) = \mu(A,t) + \int\limits_{Q_m} G(t,s,A,\mu(A_1,s),\mu(A_2,s),\ldots,\mu(A_n,s))\nu_m(ds) \qquad (2.2.5)$$

სადაც $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ფიქსირებული ზომადი სიმრავლეებია $\mathrm{B}$-დან, ხოლო $G(t,s,A,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ არის ფუნქცია განსაზღვრული $Q_{2m} \times \mathrm{B} \times R^n$-ზე. ასეთ ასახვას ჩვენ უწოდებთ ცილინდრული ტიპის გარდაქმნას.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\int\limits_{Q_m} G(t,s,A,\mu(A_1,s),\mu(A_2,s),\ldots,\mu(A_n,s))\nu_m(ds) = g(t,A,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$$

$$\left.\frac{\partial g(t,A_i,\mu_1,\ldots,\mu_{j-1},u_j,\mu_{j+1},\ldots,\mu_n)}{\partial u_j}\right|_{u_j=\mu_j} = g'_{ij}(t,A_i,\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

$P_\mu$-ით ავღნიშნოთ $\mu$ ემთხვევითი ზომის განაწილება. $\widetilde{L}_2(Q_m)$ სივრცის (2.2.5) გარდაქმნას $\mu$ ზომა გადაჰყავს $\widetilde{\mu}$ ზომაში, რომლის განაწილებაც ავღნიშნოთ $P_{\widetilde{\mu}}$-ით. მინლოს-საზონოვის თეორემის თანახმად ეს ზომები თავმოყრილია $\widetilde{L}_2^-(Q_m)$ სივრცეში. ჩვენ გვაინტერესებს, თუ რა პირობებშია ეს განაწილებები ექვივალენტური.

**თეორემა 2.2.2.** თუ (2.2.5) გარდაქმნას გააჩნია 1), 2) და 3) თვისებები, სადაც $A_1, A_2, ..., A_n$ ფიქსირებული ზომადი სიმრავლეებია $\mathrm{B}$-დან და $G(t,s,A,x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია $Q_{2m} \times \mathrm{B} \times R^n$ სიმრავლეზე აკმაყოფილებს პირობებს

1) $G(t,s,A,x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია ყოველი $A \in \mathrm{B}$-თვის $t, s \in Q_m$ მიმართ, დიფერენცირებადია $x_1, x_2, ..., x_n$ მიმართ და კვადრატით ინტეგრებადია $\nu_m \times \nu_m \times l_n$ ზომით, სადაც $l_n$ ლებეგის ზომაა $R^n$-ში

2) ფიქსირებული $t$, $s \in Q_m$ და $x_1, x_2, ..., x_n \in R$-თვის $G(t,s,A,x_1,x_2,...,x_n)$ წარმოადგენს ზომას $\mathrm{B}$-ზე

3) არსებობს არანულოვანი დეტერმინანტი

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1+g'_{11}(x) & g'_{12}(x) & \dots & g'_{1n}(x) \\ g'_{21}(x) & 1+g'_{22}(x) & \dots & g'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g'_{n1}(x) & g'_{n2}(x) & \dots & 1+g'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

მაშინ, თუ ურთიერთ კოალიციურ ზომას $\beta_{rs}^{\mu\nu}$, გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული თითოეული არგუმენტის მიმართ $\widetilde{L}_2^+(Q_m)$-ს მუდმივი მიმართულებების გასწვრივ, ზომები $P_\mu$ და $P_{\widetilde{\mu}}$ ექვივალენტურია და

$$\frac{dP_{\widetilde{\mu}}}{dP_\mu}(\mu) = \Delta(\mu)\exp\left\{-\beta(t,g(t,A,\mu),\mu) - \frac{1}{2}\|g(t,A,\mu)\|^2_{\widetilde{L}_2(Q_m)}\right\} \tag{2.2.6}$$

სადაც $\beta(t,g,A)$ წარმოადგენს გაფართოებულ სტოქასტურ ზომად ფუნქციონალს ( [35])

დამტკიცება: გამოვიყენოთ (2.2.5) გარდაქმნისათვის თეორემა 2.2.1, ამისათვის საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ ამ ასახვას გააჩნია შექცეული. ჩავსვათ (2.2.5)-ში თანმიმდევრულად $A_1$, $A_2$, . . . , $A_n$ და შევადგენოთ სისტემა

$$\widetilde{\mu}(t,A_2) = \mu(t,A_2) + \int_{Q_m} G(t,s,A_2,\mu(s,A_1),...,\mu(s,A_n))\nu_m(ds)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{\mu}(t,A_n) = \mu(t,A_n) + \int_{Q_m} G(t,s,A_n,\mu(s,A_1),...,\mu(s,A_n))\nu_m(ds)$$

ამ სისტემას თეორემის 3) პირობით გააჩნია ამონახსნი $\mu(t,A_1)$, $\mu(t,A_2)$, . . . , $\mu(t,A_n)$ ზომების მიმართ, ანუ არსებობს $H_1$, $H_2$, . . . , $H_n$, ისეთები, რომ

$$\mu(t,A_1) = H_1(t,A_1,...,A_n,\widetilde{\mu}(t,A_1),...,\widetilde{\mu}(t,A_n))$$

$$\mu(t,A_2) = H_2(t,A_1,...,A_n,\widetilde{\mu}(t,A_1),...,\widetilde{\mu}(t,A_n))$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu(t,A_n) = H_n(t,A_1,...,A_n,\widetilde{\mu}(t,A_1),...,\widetilde{\mu}(t,A_n))$$

ამიტომ (1)-დან მივიღებთ შექცეული ასახვის შემდეგ სახეს:

$$\mu(t,A)=\widetilde{\mu}(t,A)-$$

$$-\int_{Q_m} G(t,s,A,H_1(s,A_1,\dots,A_n,\widetilde{\mu}(s,A_1),\dots\widetilde{\mu}(s,A_n)),\dots,H_n(s,A_1,\dots,\widetilde{\mu}(s,A_1),\dots\widetilde{\mu}(s,A_n)))\gamma_m(ds).$$

შევნიშნოთ, რომ ურთიერთ კოალიციური ზომის სიგლუვე (ლოგარითმული წარმოებულის არსებობის აზრით $\widetilde{L}_2^+(Q_m)$-ს მუდმივი მიმართულებების გასწვრივ) უზრუნველყოფს $P_\mu$ განაწილების ასეთსავე სიგლუვეს. თეორემა2.2.2-ის დანარჩენი მოთხოვნები ავტომატიურად შესრულებულია, რაც უზრუნველყოფს მოცემული თეორემის სამართლიანობას.

## §2.3 ადიაბატური პროცესების შესწავლა ზომათა აბსოლუტური უწყვეტობის გამოყენებით

შემთხვევითი ზომები და ზომის შემცველი დიფერენციალური განტოლებები ხშირად გვხვდება ფიზიკის, ტექნიკისა და ბუნებისმეტყველების ისეთი ამოცანების განხილვისას, სადაც რაიმე პროცესებისას ხდება სხეულისათვის დამახასიათებელი ისეთი სიდიდეების ცვლილება, რომელებიც ზომას წარმოადგენენ (მოცულობა, შინაგანი ენერგია, მასა...). ბუნებრივია, ასეთ ამოცანებთან საქმე გვაქვს მაკროსისტემების შესწავლის დროს. თერმოდინამიკაში, სადაც სხეულის ქვეშ იგულისხმება სივრცის გარკვეული ნაწილი, რომელიც რაიმე ნივთიერებითაა შევსებული და რომლის ძირითად პარამეტრებსაც, სხვებთან ერთად, მოცულობა და შინაგანი ენერგია წარმოადგენს, მრავლად გვხდება საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია შემთხვევითი ზომების შესწავლასთან.

განვიხილოთ ჩაკეტილი თერმოდინამიკული სისტემა. თერმოდინამიკის პირველი კანონის თანახმათ

$$\delta Q = dU + \delta A$$

სადაც $\delta Q$ სისტემაზე გადაცემული უსასრულო მცირე სითბოა, $dU$ სისტემის შინაგანი ენერგიის უსასრულოდ მცირე ცვლილება, ხოლო $\delta A$ სისტემის მიერ შესრულებული უსასრულოდ მცირე მუშაობა. შინაგანი ენერგიისაგან განსხვავებით, მუშაობა და სითბო არ წარმოადგენენ სხეულისათვის დამახასიათებელ თვისებებს, ამიტომ $\delta Q$ და $\delta A$ აღნიშვნები განპირობებულია იმ ფაქტით, რომ ისინი არ წარმოადგენენ სრულ დიფერენციალებს, ხოლო შინაგანი ენერგია მდგომარეობის ფუნქციაა და მათემატიკური თვალსაზრისით იგი ზომას წარმოადგენს.

ადიაბატური პროცესის $\delta Q = 0$ და გვექნება

$$dU = -pdV$$

სადაც $p$ აღნიშნავს წნევას, ხოლო $V$ სხეულის მიერ დაკავებულ სივრცის მოცულობას. ამ განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ გაზის მდგომარეობის განტოლება

$$p = f(V,T)$$

სადაც $T$ სხეულის ტემპერატურაა. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ შინაგანი ენერგია წარმოადგენს მოცულობის და ტემპერატურის ფუნქციას, $U = U(T,V)$ და ამ განტოლებიდან ამვხსნით $T$-ს მდგომარეობის განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს $p = P(U,V)$ და ადიაბატური პროცესის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{dU}{dV} = -P(U,V)$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვაძლევს სხეულის შინაგანი ენერგიისა და მოცულობის დამოკიდებულებას.

ერთი კილომოლი იდეალური გაზის შემთხვევაში, როცა $P = \frac{RT}{V}$, $U = C_v T$, სადაც $R$ გაზთა უნივერსალური მუდმივაა, ხოლო $C_v$– კუთრი სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს(იხ.[13],[27]), განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{dU}{dV} = -\frac{RU}{C_v V}$$

და მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$U = const.V^{\alpha},$$

სადაც $\alpha = -\frac{R}{C_v}$

ამ განტოლების ანალოგიური განტოლება შეგვიძლია მივიღოთ $V,T$ ცვლადების მიმართ, თუ ჩავთვლით, რომ $dU = C_v dT$, $p = P(V,T)$, მივიღებთ:

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{C_v}{P(V,T)}$$

რომელიც იდიალური გაზის შემთხვევაში გვაძლევს პუასონის ადიაბატის განტოლებას $TV^{\gamma-1} = const$, სადაც $\gamma = 1 + \frac{R}{C_v}$

რეალური გაზის შემთხვევაში მდგომარეობის განტოლების დადგენა არა მარტო თერმოდინამიკის, არამედ მოლეკულური და სტატისტიკური ფიზიკის ამოცანას წარმოადგენს და ყოველი ნივთიერებისათვის $p = f(V,T)$ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას კონკრეტული სახე აქვს, რომელიც დგინდება გარკვეული ექსპერიმენტების საფუძველზე(იხ.[27]).

ზოგადად, რეალური გაზის შემთხვევაში მდგომარეობის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$p = \frac{RT}{V} + \frac{B_2}{V^2} + \frac{B_3}{V^3} + \ldots$$

სადაც $B_2, B_3, \ldots$ კოეფიციენტები ტემპერატურის ფუნქციებია და მათი დადგენა ხდება კონკრეტულ შემთხვევებში მოლეკულურ-კინეტიკური თეორიის მეთოდებით. აქედან გამომდინარე, რეალური გაზის შემთხვევაში ზემოთ განხილული

განტოლებების ამონახსნის პოვნა ანალიზური სახით პრაქტიკულად შეუძლებელია.

ადიაბატური პროცესისას ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ სისტემა აბსოლუტურად იზოლირებულია გარემოდან და ყოველ მომენტში წონასწორობის მდგომარეობაშია, ე. ი. თერმოდინამიკური პარამეტრები ერთნაირია სხეულის ყოველ ნაწილში, გარდა ამისა თვით სხეულის შიგნით არ აქვს ადგილი რაიმე ქიმიურ პროცესებს და მდგომარეობის განტოლება ზუსტად ასახავს დამოკიდებულებას თერმოდინამიკურ პარამეტრებს შორის. აქედან გამომრინარე მოცემულ განტოლებებთან ერთად მიზანშეწონილია განვიხილოთ განტოლებები:

$$\frac{dU}{dV} = -P(U,V) + \xi(V)$$

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{C_v}{P(V,T)} + \xi(T)$$

სადაც $\xi(V)$ და $\xi(T)$ შემთხვევითი ფუნქციებია. ეს განტოლებები შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც შემდეგი სახის ოპერატორული განტოლების კერძო შემთხვევები:

$$L(\mu,t) = f(\mu,t) + \xi(t)$$

განვიხილოთ რეალური გაზის ადიაბატის განტოლება ასეთი სახით:

$$\frac{dV}{dT} + \xi(T) = -\frac{C_v(T)}{P(T,V)} \tag{2.3.1}$$

$$T_0 \le T \le a, \qquad \xi(T_0) = T_0, \qquad V(T_0) = V_0, \qquad M\xi(T) = 0$$

სადაც $V$-ერთი მოლი გაზის მოცულობაა. $C_v(T)$ გაზის სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს (იგი მიიჩნევა მუდმივ სიდიდედ ტემპერატურის გარკვეულ ინტერვალებში), $P = P(T,V)$ რეალური გაზის მდგომარეობის განტოლება, $T$ გაზის ტემპერატურა, $\xi(T)$ გაუსის შემთხვევითი პროცესი 0-ის ტოლი საშუალოთი და $R(T,S)$ კორელაციის ფუნქციით. ზოგადობის შეუზღუდავად ვგულისხმობთ, რომ $V(T_0) = V_0 = 0$

$$R(T,S) = M\xi(T)\xi(S),$$

ამასთან იგულისხმება, რომ

$$\int_{T_0}^{a} R(s,s)ds < +\infty$$

და ამიტომ

$$\int_{T_0}^{a}\int_{T_0}^{a} R(\tau,s)d\tau ds < +\infty$$

**შენიშვნა 2.3.1.** იდეალური გაზის შემთხვევაში $C_v(T) = C_v$, $p = \frac{RT}{V}$, სადაც $R$-გაზის უნივერსალური მუდმივაა და (2.3.1) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{dV}{dT} + \zeta(T) = -\frac{C_v}{RT} \cdot V$$

ეს განტოლება წრფივი დიფერენციალური განტოლებაა და მისი შესწავლა სიძნელეს არ წარმოადგენს.

**შენიშვნა 2.3.2.** რეალური გაზების შემთხვევაში (2.3.1.) განტოლება არაწრფივია და მას, შედარებით რთული სახე აქვს. გარდა ამისა შინაგანი ენერგია დამოკიდებულია სხეულის მოცულობაზეც. მაგალითად, გაზებში, რომელთა მდგომარეობის განტოლება აღიწერება ვან-დერ-ვაალსის განტოლებით (იხ[27])

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{c}{V^2}$$

$U = C_v T - \frac{c}{V}$ და (2.3.1.) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{dV}{dT} + \xi(T) = -\frac{C_v}{RT} \cdot (V-b)$$

ზოგად შემთხვევში კი ვღებულობთ (2.3.1.)-ის ანალოგიურ განტოლებას

$$\frac{dV}{dT} + \xi(T) = -\frac{C_v(T)}{P^*(T,V)},$$

სადაც

$$P^*(T,V) = P(T,V) + \frac{c}{V^2}.$$

ვთქვათ $\Phi$ არის $L_2[T_0,a]$-ზე განსაზღვრული ფუნქციონალი $\Phi : L_2 \to R$. ამოცანა მდგომარეობს (2.3.1) განტოლების ამონახსნისათვის $\Phi$ ფუნქციონალის მნიშვნელობის $E\Phi(V)$ საშუალოს გამოთვლებში. ღადგან (2.3.1) განტოლება არაწრფივია $V$-ს მიმართ საზოგადოდ მისი ამონახსნი ანალიზური სახით არ გამოისახება და დასმული მიზნისათვის ალტერნატიული გზა უნდა ვეძებოთ.

**(2.3.1)** განტოლების პარალელურად განვიხილავთ გაწრფივებულ განტოლებას

$$\frac{dU}{dT} + \xi(T) = 0 \tag{2.3.2}$$

$$T_0 \le T \le a, \qquad \xi(T_0) = 0, \qquad \mathrm{U}(T_0) = 0, \qquad M\xi(T) = 0$$

(2.3.1) და (2.3.2) განტოლების ამონახსნები $U(T)$ და $V(T)$ წარნოადგენენ შემთხვევით ზომებს და მათ მიერ წარმოქმნილი ზომები $\mu_u$ და $\mu_v$ წარმოადგენენ ზომებს $L_2[T_0,a]$ სივრცეში, რომელშიც შეიძლება ვაჩვენოთ $\mu_u$ და $\mu_v$ ზომების ექვივალენტობა. რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული, ანუ სიმკვრივე ასე ავღნიშნოთ:

$$\rho(U) = \frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)$$

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია მოვახდინოთ ცვლადების შეცვლა,

$$E\Phi(V)=\int_{L_2}\Phi(x)\mu_v d(x)=\int_{L_2}\Phi(x)\frac{d\mu_v(x)}{d\mu_u(x)}\mu_u(dx)=E\Phi(U)\rho(U) \qquad (2.3.3)$$

და დასმული ამოცანა დადის უფრო მარტივი (2) სახის განტოლების ამონახსნის ფუნქციონალის პოვნაზე. (2)-დან შეგვიძლია ჩავწეროთ,

$$U(T)=-\int_{T_0}^{T}\xi(\tau)d\tau \qquad (2.3.4)$$

ცხადია $U(T)$ გაუსის სემთხვევითი პროცესია და მისთვის

$$EU(T)=0\,,$$

$$EU^2(T)=E\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{T}\xi(s)\xi(\tau)d(s)d(\tau\}=\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{T}R(s,\tau)d\tau ds\,,$$

$$R_u(t,s)=EU(t)U(s)=\int_{T_0}^{t}\int_{T_0}^{s}R(\tau.\lambda)d\tau d\lambda\,.$$

(2.3.3) გამოსახულების მარჯვენა მხარის გამოსათვლელად, ცხადია, უნდა შეგვეძლოს რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულის გამოთვლა. ასე, რომ უნდა დავადგინოთ $\mu_v$ და $\mu_u$ ზომების ექვივალენტობა და გამოვიყვანოთ შესაბამისი სიმკვრივის გამოსათვლელი ეფექტური ფორმულა. ამისათვის გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში მოყვანილ შედეგებს შემთხვევითი გაუსური ზომის არაწრფივი გარდაქმნის შესახებ.

(2.3.1) და (2.3.2) განტოლებებიდან შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{dW}{dT}=\frac{C_v(T)}{P(T,V)}\;,\quad W(T_0)=0\,,$$

სადაც $W=V-U$. შესაბამისად

$$W(T)=\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,V)}d\tau\,,$$

ე. ი.

$$U(T)=V(T)-\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,V)}d\tau \qquad (2.3.5)$$

მიღებული (2.3.5) გამოსახულება განვიხილოთ როგორც გარდაქმნა $L_2$ -ში. ეს არაწრფივი გარდაქმნაა და რადგანაც $\mu_u$ გაუსის ზომაა , ამიტომ (2.3.5) შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც გაუსის ზომიანი ჰილბერტის სივრცის არაწრფივი გარდაქმნა. ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები.

აღვნიშნოთ $K_u(t,s)$-ით ისეთი ორი ცვლადის ფუნქცია,რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$R_u(t,s)=\int_{T_0}^{a}K_u(t,\tau)K_u(s,\tau)d\tau$$

(2.3.5) გარდაქმნა ასე ჩავწეროთ

$$U(T)=V(T)+\int_{T_0}^{a}K_u(T,\tau)g(\tau,V)d\tau$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ უნდა მოიძებნოს ისეთი ფუნქციონალი $g(\tau,V)$, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$-\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(t)}{P(t,V)}dt=\int_{T_0}^{a}K_u(T,\tau)g(\tau,V)d\tau \tag{2.3.6}$$

ავღნიშნოთ $K_\xi(t,s)$-ით ისეთი ორი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$R(t,s)=\int_{T_0}^{a}K_\xi(t,\tau)K_\xi(s,\tau)d\tau \tag{2.3.7}$$

როგორც ცნობილია კლასიკური ანალიზიდან ამგანტოლებას ყოველთვის გააჩნია ამონახსნი $K_\xi(t,s)$. ადვილად შევამჩნევთ თანაფარდობას:

$$K_u(t,s)=-\int_{T_0}^{t}K_\xi(\tau,s\}ds\,,$$

ამიტომ (2.3.5) ასე ჩაიწერება:

$$-\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(t)}{P(t,V)}dt=-\int_{T_0}^{T}\int_{T_0}^{a}K_\xi(t,\tau)g(\tau,V\}d\tau dt\,.$$

ცხადია (2.3.5) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი თუ

$$\frac{C_v(T)}{P(T,V)}=\int_{T_0}^{a}K_\xi(T,\tau)g(\tau,V)dt \tag{2.3.8}$$

განტოლებას გააჩნია ამონახსნი $g(\tau,V)$-ს მიმართ.

**თეორემა 2.3.1.** თუ (2.3.8) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი $g(\tau,V)$-ის მიმართ, მაშინ $\mu_v$ და $\mu_u$ ექვივალენტურნი არიან და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს ასეთი სახე:

$$\rho(U)=\frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)=\exp\left\{-\int_{T_0}^{a}g(\tau,U)dW(\tau)-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a}g^2(\tau,U)d\tau\right\} \tag{2.3.9}$$

დამტკიცება: (3.2.5) გარდაქმა წარმოადგენს $L_2$ სივრცის ვოლტერას ტიპის გარდაქმნას, ამიტომ ცნობილი თეორემის თანახმათ (იხ. [4] ) $\det[I+K]=1$. (2.3.9) ფორმულაში $W(t)$ ასე გამოისახება;

$$\xi(t)=\int_{T_0}^{a}K_\xi(t,\tau)dW(\tau) \tag{2.3.10}$$

პირველი ინტეგრალი წარმოადგენს სტოქასტურ ინტეგრალს გაფართოებული სახით. წინა პარაგრაფის თეორემა 2.2.1 გამოდის, რომ $\mu_u$ და $\mu_v$ ექვივალენტურია და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს გააჩნია (2.3.9) სახე.

დამტკიცებული თეორემის თანახმათ (2.3.3) გამოსახულების გამოთვლა დადის შემდეგზე:

$$E\Phi(U)\rho(U) = E\Phi(U)\exp\left\{-\int_{T_0}^{a} g(\tau,U)dW(\tau) - \frac{1}{2}\int_{T_0}^{a} g^2(\tau,U)d\tau\right\}$$

გამოვიყენოთ სტანდარტული ხერხი ასეთი გამოთვლების გამარტივებისათვის.

ვთქვათ $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ ორთოგონალური ბაზისია $L_2$-ში მაშინ $\xi(t)$ გაუსური პროცესის კორელაციის ფუნქცია ასე წარმოდგება:

$$R(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t)\varphi_k(s)$$

და თუ ავიღებთ

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} \varphi_k(t)\varphi_k(s)$$

გამოსახულებას, ის დააკმაყოფილებს (6) ტოლობას, ამ შემთხვევაში (2.3.8) ასე ჩაიწერება:

$$\frac{C_v(T)}{P(T,V)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} \varphi_k(T)\int_{T_0}^{a} \varphi_k(s)g(s,V)ds$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე $\varphi_k(T)$-ზე და ვაინტეგროთ $[T_o,a]$-ინტერვალზე. ამასთან გავითვალისწინოთ

$$\int_{T_0}^{a} \varphi_k(s)g(s,V)ds = g_k(V),$$

$$\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\int_{T_0}^{a} \frac{C_v(T)}{P(T,V)}\varphi_k(T)dT = g_k(V)$$

ცხადია, მარცხენა მხარეში ინტეგრალი წარმოადგენს $\dfrac{C_v(T)}{P(T,V)}$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტს. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$g(T,V) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(V)\varphi_k(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \varphi_k(T)\int_{T_0}^{a} \frac{C_v(t)}{P(t,V)}\varphi_k(t)dt$$

ანალოგიურად (2.3.10)- დან ვღებულობთ

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \varphi_k(t)\int_{T_0}^{a} \varphi_k(\tau)dW(\tau).$$

აქედან:

$$\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\int_{T_0}^{a} \xi(t)\varphi_k = \int_{T_0}^{a} \varphi_k(\tau)dW(\tau) = W_k.$$

ე. ი.

$$W(t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\varphi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\varphi_k(t)\int_{T_0}^{a}\xi(t)\varphi_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\varphi_k(t)\xi_k \,.$$

ამიტომ

$$\int_{T_0}^{a}g(\tau,V)dW(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(t)}{P(t,V)}\varphi_k(t)dt\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\xi_n C_{vk}m_{kn}\,,$$

სადაც

$$C_{vk}=\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,V)}\varphi_k(\tau)d\tau\,,\qquad m_{kn}=\int_{T_0}^{a}\varphi_k(\tau)d\varphi_n(\tau)$$

ანალოგიურად გამოითვლება მეორე ინტეგრალიც

$$\int_{T_0}^{a}g^2(\tau,V)d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,V)}\varphi_k(\tau)d\tau\right)^2\cdot\int_{T_0}^{a}\varphi_k(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}C_{vk}^2$$

ანუ რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს ექნება ასეთი სახე:

$$\rho(U)=\frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\xi_n C_{vk}m_{kn}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}C_{vk}^2\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}C_{vk}^2\right\}.$$

ამგამოსახულების ჩასმა (2.3.3)-ში და (2.3.4)-ის გათვალისწინება გვაძლევს მათემატიკური ლოდინის გამოთვლას ცხადი სახით.

საინტერესოა ის შემთხვევა როცა $\xi(t)$ (2.3.1) და შესაბამისად (2.3.2) განტოლებაში წარმოადგენს ე. წ. „თეთრ ხმაურს". ამ შემთხვევაში აღნიშნულ განტოლებებს უნდა მიეცეს სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების სახე:

$$dV+dW(T)=\frac{C_v(T)}{P(T,V)}dT \qquad (2.3.11)$$

$$T_0\le T\le a,\qquad V(T_0)=0$$

და

$$dU+dW(T)=0\ ,\qquad U(T_0)=0$$

ანუ $U(T)=W(T-T_0)$. აქ და (2.3.11)-ში $W(T)$ ვინერის პროცესია. ზემოთ მოყვანილი თეორემა ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია (იხ.[39]). უფრო მეტიც, რადგანაც

$$K_\xi(T,\tau)=\delta(T-\tau)\,,$$

ამიტომ (7) განტოლებას გააჩნია ცხადი სახის ამონახსნი

$$g(T;V)=\frac{C_v(T)}{P(T,V)}dT$$

და რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს ასეთი სახე მიეცემა:

$$\rho(U)=\frac{d\mu_v}{d\mu_u}(U)=\exp\left\{-\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,-W)}dW(\tau)+\frac{1}{2}\int_{T_0}^{a}\frac{C_v^2(\tau)}{P(\tau,-W)}d(\tau)\right\}$$

ამიტომ

$$E\Phi(V) = E\Phi(-W)\exp\left\{-\int_{T_0}^{a}\frac{C_v(\tau)}{P(\tau,-W)}dW(\tau) + \frac{1}{2}\int_{T_0}^{a}\frac{C_v^2(\tau)}{P(\tau,-W)}d(\tau)\right\}$$

საშუალოს შეფასების მოყვანილი მეთოდი ატარებს ზოგად ხასიათს და ის შეიძლება გამოყენებული იქნეს სხვა შემთხვევებშიც.

## §2.4 მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა შემთხვევით კოეფიციენტებიანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის

დაუშვათ $\{\Omega, \Im, P\}$ ფიქსირებული ალბათური სივრცეა; $L_2 = L_2([0,1]\times\Omega)$ კი ნამდვილმნიშვნელობებიანი შემთხვევით ფუნქციათა სივრცე, რომელთაც გააჩნიათ მეორე რიგის სასრული მომენტები $\|x\|^2 = E\int_0^1 x^2(t)dt < \infty$. სკალარული ნამრავლს ამ სივრცეში აქვს სახე $(x,y) = E\int_0^1 x(t)y(t)dt$. ვთქვათ $w(t)$ ვინერის პროცესია

განვიხილოთ მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა

$$y''(t) + \alpha(t)y(t) = w'(t), \tag{2.4.1}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (\operatorname{mod} P), \qquad t \in [0,1].$$

სადაც $\alpha(t)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$\alpha(t) = a(t) + \int_0^1 A(t,s)dw(s) \tag{2.4.2}$$

აქ $a(t)$ და $A(t,s)$ არაშემთხვევითი ფუნქციებია, $a(t) \in L_2([0,1])$, $A(t,s) \in L_2([0,1]^2)$, მაშინ $\alpha(t) \in L_2([0,1]\times\Omega)$ და წარმოადგენს გაუსის პროცესს, რომლისთვისაც $E\alpha(t) = a(t)$, ხოლო კორელაციურ ბირთვს აქვს სახე

$$K(t,s) = a(t)a(s) + \int_0^1 A(t,\tau)A(s,\tau)d\tau$$

განვიხილოთ (2.4,1) ამოცანის ექვივალენტური ამოცანა

$$y'(t)+\int_0^t \alpha(s)y(s)ds = w(t)$$

$$\int_0^1 \alpha(s)y(s)ds = w(1), \qquad (\mathrm{mod}\, P)\,.$$

ჩვენი მიზანია ავაგოთ (2.4.1) განტოლების ამონახსნი. ამისათვის განვიხილოთ პირდაპირი და შებრუნებული საწყისი ამოცანა

$$y_1''(t)+\alpha(t)y_1(t)=0\,, \tag{2.4.3}$$

$$y_1(0)=1, \quad y_1'(0)=0\,,$$

$$y_2''(t)+\alpha(t)y_2(t)=0\,, \tag{2.4.4}$$

$$y_2(1)=1\,, \quad y_2'(1)=0\,.$$

$\alpha(t)$ ფუნქციის ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები უზრუნველყოფენ (2.4.3)-(2.4.4) ამოცანების ამონახსნების არსებობასა და ერთადერთობას. უფრო მეტიც, თანმიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით, ამონახსნებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$y_1(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^t\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2}\dots\int_0^{\lambda_{2k-1}}\alpha(\lambda_2)\alpha(\lambda_3)\cdot\ldots\cdot\alpha(\lambda_{2k})d\lambda_{2k}\cdot\ldots\cdot d\lambda_3 d\lambda_2 d\lambda_1$$

და

$$y_2(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_t^1\int_{\lambda_1}^1\int_{\lambda_2}^1\dots\int_{\lambda_{2k-1}}^1\alpha(\lambda_2)\alpha(\lambda_3)\cdot\ldots\cdot\alpha(\lambda_{2k})d\lambda_{2k}\cdot\ldots\cdot d\lambda_3 d\lambda_2 d\lambda_1\,.$$

ამ სისტემის ვრონსკიანი $V(t)=y_1(1)\neq 0 \quad (\mathrm{mod}\, P)$, ამიტომ $y_1$, $y_2$ სისტემა დამოუკიდებელია.

ავაგოთ ამ ამოცანისათვის გრინის ფუნქცია

$$G(t,s)=\begin{cases} y_1(t)y_2(s)V^{-1}(0), & \mathrm{t}\le \mathrm{s} \\ y_1(s)y_2(t)V^{-1}(0), & \mathrm{t}>\mathrm{s} \end{cases} \tag{2.4.5}$$

შევეცადოთ (2.4.1) ამოცანის ამონახსნი ჩავწეროთ დალეცკი-სკოროხოდის გაფართოებული სტოქასტური ინტეგრალის სახით

$$y(t)=\int_0^1 \langle G(t,s), dw(s)\rangle \tag{2.4.6}$$

ამისათვის საჭიროა ვაჩვენოთ ამ ინტეგრალის არსებობა. განვიხილოთ გამოსახულება

$$E\int_0^1\left(\frac{\delta G(t,s)}{\delta w(u)}\right)^2 du$$

შევნიშნოთ, რომ $\dfrac{\delta\alpha(t)}{\delta w(u)}=A(t,u)$ და

$$\frac{\delta y_1(t)}{\delta w(u)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^t\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2}\dots\int_0^{\lambda_{2k-1}}\sum_{i=1}^{k}A(t_{2i},u)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\alpha(\lambda_{2j})d\lambda_{2k}\cdot\ldots\cdot d\lambda_3 d\lambda_2 d\lambda_1\,,$$

$$\frac{\delta y_2(t)}{\delta w(u)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_t^1\int_{\lambda_1}^1\int_{\lambda_2}^1\ldots\int_{\lambda_{2k-1}}^1\sum_{i=1}^{k}A(t_{2i},u)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\alpha(\lambda_{2j})d\lambda_{2k}\cdot\ldots\cdot d\lambda_3 d\lambda_2 d\lambda_1 .$$

გავითვალისწინოთ, რომ გაუსური სიდიდეებისათვის

$$E\prod_{k=1}^{n}\alpha(t_{2k})=0, \qquad \text{როცა} \quad n=2m-1, \quad m=1,2,\ldots$$

$$E\prod_{k=1}^{n}\alpha(t_{2k})\leq(2m-1)!!A^m, \quad \text{როცა} \qquad n=2m, \quad m=1,2,\ldots$$

სადაც $A$ მუდმივი ისეა შერჩეული, რომ

$$\int_0^1 A(t,s)ds<A$$

ამიტომ

$$\int_0^1 E\left[\frac{\delta y_1(t)}{\delta w(u)}y_2(s)V^{-1}(0)\right]^2 du\leq\int_0^1 E\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\int_0^t\int_0^{\lambda_1}\ldots\int_0^{\lambda_{2k-1}}\int_t^1\cdot\right.$$

$$\left.\ldots\int_0^{\lambda_{2k-1}}\int_t^1\int_{\tau_1}^1\ldots\int_{\tau_{2m-1}}^1\sum_{i=1}^{k}A(t_{2k},u)\prod_{\substack{j,m=1\\ j\neq i}}^{k}\alpha(\lambda_{2j})\alpha(\tau_{2m})d\tau_{2m}\ldots d\tau_1 d\lambda_{2j}\ldots d\lambda_1\right]^2 du\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!A^m}{\prod_{i=1}^{m}(2i+1)!}<\infty .$$

ანალოგიურად, მეორე შესაკრებისათვის გვექნება

$$\int_0^1 E\left[y_1(t)\frac{\delta y_2(s)}{\delta w(u)}V^{-1}(0)\right]^2 du<\infty .$$

ამ შეფასებებიდან ჩანს, რომ სტოქასტური წარმოებულის აუცილებელი მომენტები არსებობენ, რაც უზრუნველყოფს დალეცკი-სკოროხოდის (2.4.6) სტოქასტური ინტეგრალის არსებობას.

შევამოწმოთ რომ (2.4.6) გამოსახულება წარმოადგენს (2.4.1) ამოცანის ამონახსნს, ჩავსვათ ფორმალურად (2.4.6) (2.4.1)-ში

$$\int_0^1\left\langle G''_{t^2}(t,s),dw(s)\right\rangle+\alpha(t)\int_0^1\left\langle G(t,s),dw(s)\right\rangle=w'(t)$$

გრინის (2.4.5) ფუნქციის აგების თანახმად:

$$G''_{t^2}(t,s)+\alpha(t)G(t,s)=\delta(t-s) \tag{2.4.7}$$

ვისარგებლოთ მუდმივი შემთხვევითი სიდიდის სტოქასტური ინტეგრალის გარეთ გამოტანის ფორმულით

$$\int_0^1\gamma(\omega)f(\omega,t)dw(t)=\gamma(\omega)\int_0^1 f(\omega,t)dw(t)-\int_0^1\frac{\delta\gamma(\omega)}{\delta w(t)}f(\omega,t)dt .$$

მივიღებთ

$$\int_0^1\left\langle G''_{t^2}(t,s),dw(s)\right\rangle+\alpha(t)\int_0^1\left\langle G(t,s),dw(s)\right\rangle=\int_0^1\left\langle G''_{t^2}(t,s),dw(s)\right\rangle+$$

$$+\int_0^1\left\langle \alpha(t)G(t,s),dw(s)\right\rangle+\int_0^1 A(t,s)G(t,s)ds=\int_0^1\left\langle G''_{t^2}(t,s)+\alpha(t)G(t,s),dw(s)\right\rangle+$$

$$+\int_0^1 A(t,s)G(t,s)ds=\int_0^1\delta(t-s)dw(s)+\int_0^1\left[\frac{\delta G''_{t^2}(t,s)}{\delta w(s)}+\alpha(t)\frac{\delta G(t,s)}{\delta w(s)}\right]ds+\int_0^1 A(t,s)G(t,s)ds\,.$$

(2.1.7) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\int_0^1\left[\frac{\delta G''_{t^2}(t,s)}{\delta w(s)}+\alpha(t)\frac{\delta G(t,s)}{\delta w(s)}\right]ds+\int_0^1 A(t,s)G(t,s)ds=$$

$$=\int_0^1\frac{\delta}{\delta w(s)}\left[G''_{t^2}(t,s)+\alpha(t)G(t,s)\right]ds=0$$

სადანაც საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\int_0^1\left\langle G''_{t^2}(t,s),dw(s)\right\rangle+\alpha(t)\int_0^1\left\langle G(t,s),dw(s)\right\rangle=\int_0^1\delta(t-s)dw(s)=w'(t)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამგვარად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულების სამართლიანობა

**თეორემა 2.4.1.** თუ (2.4.1) სასაზღვრო ამოცანისათვის შესრულებულია (2.4.2) პირობა, სადაც $a(t)\in L_2([0,1])$ და $A(t,s)\in L_2([0,1]^2)$, მაშინ (2.4.1) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ალბათობით 1, რომელიც მოიცემა (2.4.6) სტოქასტური ინტეგრალის სახით, სადაც გრინის ფუნქცია $G(t,s)$ განისაზღვრება (2.4.5) ფორმულით (2.4.3) და (2.4.4) საწყისი ამოცანების საშუალებით

**შენიშვნა:** მართალია, ზემოთ მოყვანილი დამტკიცება ატარებს ფორმალურ ხასიათს, მაგრამ გლუვი (ძირითადი) ფუნქციების შეტანას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მივყავართ ამ მსჯელობის სამართლიანობამდე, რადგან აქ მოყვანილი მსჯელობები მოყვანილია განზოგადებული ფუნქცათა კლასისათვის

მაგალითი 1. თუ $\alpha(t)\equiv 1$, მაშინ

$$y''(t)+y(t)=w'(t)\,,$$

$$y'(0)=y'(1)=0\,,\qquad 0\le t\le 1$$

ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y(t)=\frac{1}{\sin 1}\left[\cos t w(1)+\cos(1-t)\int_0^t\sin s w(s)ds-\cos t\int_t^1\sin(1-s)w(s)ds\right]$$

მიღებული შედეგების გამოყენების საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ერთი ამოცანა გლუვი ზომების თეორიიდან.

ვთქვათ გვაქვს მეორე სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი განტოლებისათვის

$$y''(t)+a(t)y(t)=w'(t)+f'(t), \tag{2.4.8}$$

$$y'(0)=y'(1)=0\,,\quad (\mathrm{mod}\,P)\,,\quad t\in[0,1]\,,$$

სადაც $f(t)\in W^1([0,1])$ და $a(t)$ დეტერმინირებული უწყვეტი ფუნქციებია. თეორემა 2.4.1.-ის თანახმად ამ ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება ჩვეულებრივი სტოქასტური ინტეგრალის სახით

$$y(t)=\int_0^1 G(t,s)dw(t)+\int_0^1 G(t,s)df(s)$$

(2.4.8) ამოცანასთან ერთად, განვიხილოთ ამოცანა:

$$x''(t)+a(t)x(t)=w(t)\,, \tag{2.4.9}$$

$$x'(0)=x'(1)=0\,,\qquad (\operatorname{mod} P)\,,\qquad t\in[0,1]\,.$$

ცხადია, რომ ამ ორი პროცესისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$y(t)=x(t)+\int_0^1 G(t,s)df(s) \tag{2.4.10}$$

ვთქვათ $\mu_y$ და $\mu_x$ შესაბამისად $y(t)$ და $x(t)$ შემთხვევითი პროცესების განაწილებებია. ჩვენთვის საინტერესოა ამ ზომების აბსოლუტურად უწყვეტობის საკითხი ერთმანერთის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ ზომები $\mu_y$ და $\mu_x$ ნამდვილ მნიშვნელობებიანი გაუსური ზომებია ლებეგის ზომით კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციათა $L_2([0,1])$ სივრცეში, ამასთან $\mu_y$-ის საშუალო მნიშვნელობა

$$Ey(t)=E\left[\int_0^1 G(t,s)dw(s)+\int_0^1 G(t,s)df(s)\right]=\int_0^1 G(t,s)df(s)$$

ხოლო კორელაციური ბირთვი, მოიცემა ფორმულით

$$R_y(t,s)=Ey(t)y(s)=E\left[\int_0^1 G(t,\tau)dw(\tau)+\int_0^1 G(t,\tau)df(\tau)\right]\cdot\left[\int_0^1 G(s,\tau)dw(\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 G(s,\tau)df(\tau)\right]=\int_0^1 G(t,\tau)G(s,\tau)d\tau+\left[\int_0^1 G(t,\tau)df(\tau)\right]^2.$$

ანალოგიურად გამოითვლება $\mu_x$ ზომის მახასიათებლებიც

$$Ex(t)=0\,,\qquad R_x(t,s)=\int_0^1 G(t,\tau)G(s,\tau)d\tau\,.$$

(2.4.10) ტოლობიდან გამომდინარე, ამ ზომების ექვივალენტობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობა

$$b(t)=\int_0^1 G(t,s)df(s)\in K_xL_2([0,1])\,, \tag{2.4.11}$$

სადაც $K_x$ ინტეგრალური ოპერატორია $(K_x\varphi)(t)=\int_0^1 K_x(t,s)\varphi(s)ds$, $\varphi=\varphi(t)\in L_2([0,1])$,

ხოლო $K_x(t,s)$ ბირთვი განიაზღვრება ტოლობიდან

$$R_x(t,s)=\int_0^1 K_x(t,\tau)K_x(s,\tau)d\tau$$

ადვილი დასანახია, რომ ჩვენ შემთხვევაში $K_x(t,s)=G(t,s)$ და (2.4.11) პირობას მივყავართ

$$\int_0^1 G(t,s)r(s)ds=\int_0^1 G(t,s)df(s)$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის არსებობასთან $r(t)$ ფუნქციის მიმართ. ეს ამონახსნი კი არსებობს თუ $f(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. ამგვარად, სამართლიანია დებილება.

**თეორემა 2.4.2.** თუ $\mu_y$ და $\mu_x$ ზომები წარმოადგენენ შესაბამისად (2.4.8) და (2.4.9) ამოცანების ამონახსნთა განაწილებებს $L_2([0,1])$ სივრცეში, სადაც $a(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $f(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ეს ზომები ექვივალენტურია და რადონ –ნიკოდიმის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(u) = \exp\left\{-\int_0^1\int_0^1 G(t,s)u(t)df(s)dw(t) - \frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^1 G(t,s)df(s)\right]^2 dt\right\}$$

## §2.5. საწყისი განაწილების სტატისტიკური შეფასება ინტერვალის ბოლოს არსებულ დაკვირვებათა საფუძველზე.

დაუშვათ $[0.T]$ ინტერვალზე მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad (2.5.1)$$

და განვიხილოთ კოშის საწყისი ამოცანა $y(0) = X$, სადაც $X$ შემთხვევითი სიდიდეა უცნობი განაწილების $p(x)$ სიმკვრივით. ვიგულისხმოთ, რომ ამ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $y(t)$ ალბათობით 1, რომელიც, ცხადია,

წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს. სტატისტიკისთვის შესაძლებელია ამ პროცესის დაკვირვება ინტერვალის ბოლო $T$ წერტილში, რომელიც შეესაბამება $X$-ის გარკვეულ მიუღწევად შერჩევას, ანუ გვაქვს დაკვირვებები $y_1(T),\ y_2(T),....,y_n(T)$. ამ დაკვირვებათა საფუძველზე უნდა მოხდეს $p(x)$ სიმკვრივის შეფასება. როცა $f(t,x)\equiv 0$, მაშინ $y=X$ და ამოცანა დაიყვანება კლასიკურ ფორმაზე.

ბუნებრივია, რომ ინტეგრალური წირის გასწვრივ $p(x)$ ფუნქცია გარკვეულ კანონზომიერებას უნდა ექვემდებარებოდეს, რომ შესაძლებელი გახდეს მისი აღდგენა. მიტომ, დასაწყისისათვის ჯერ ეს საკითხი შევისწავლოთ.

ვთქვათ $(\Theta,F)$ ზომადი სივრცეა, $C=M(F)$ $F$-ზე განსაზღვრული ნამდვილმნიშვნელობებიანი $\sigma$-ადიციური სიმრავლეთა სივრცე ნორმით $\|\mu\|=(Var\ \mu)(\Theta)=\mu^+(\Theta)-\mu^-(\Theta)$,

სადაც $\mu=\mu^+-\mu^-$, ჰანის გაშლაა. $M$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს და ამ სივრცის ელემენტებს შემდგომში ვუწოდებთ ზომებს.

განვიხოლოთ ზომათა ერთობლიობა $\mu_t\in M$, სადაც $t$ ნამდვილი პარამეტრია, $0\le t\le T<\infty$. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $A\in F$-სათვის ფუნქცია $t\to\mu_t(A)$ უწყვეტია, კრებადობა $F$ -ის სიმრავლეებზე განიმარტება, როგორც სუსტი კრებადობა $M$-ზე (იხ.[2]), ამიტომ ეს ერთობლიობა შემოსაზღვრულია $M-$ზე: $\sup\limits_{0\le t\le T}\|\mu_t\|<\infty$

ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი $A\in F$-სათვის $\mu_t(A)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $t\in(0,T)$ პარამეტრის მიმართ და გააჩნია ცალმხრივი წარმოებულები $t=0$ და $t=T$ წერტილებში, მაშინ ზომას

$$\nu_t=\mu_t':A\to\frac{d\mu_t(A)}{dt}$$

ეწოდება $\mu_t$ ზომის წარმოებული $t$ პარამეტრის მიმართ. წარმოდგენიდან

$$\mu_{t_2}-\mu_{t_1}=\int_{t_1}^{t_2}\nu_t(d\tau)$$

გამომდინარეობს $\mu_t$ ერთობლიობის ვარიაციით უწყვეტობა:

$$\left\|\mu_{t_2}-\mu_{t_1}\right\|\le C(t_2-t_1)$$

თუ ზომა $\nu_t=\mu_t'$ აბსოლლუტურად უწყვეტია $\mu_t$-ს მიმართ, მაშინ რადონ-ნიკოდიმის სიმკვრივეს

$$\rho(t,x)=\frac{d\nu_t}{d\mu_t}(x)$$

ეწოდება $\mu_t$-ერთობლიობის ლოგარითმული წარმოებული $t$ პარამეტრის მიმართ.

ვთქვათ $B(F)$ შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციების ბანახის სივრცეა თანაბარი ნორმით. $\mu_t$-ს დიფერენცირებადობა, ზემოთ აღწერილი აზრით, ექვივალენტურია შემდეგი თანაფარდობის

$$\frac{d}{dt}\int_{\Theta}\varphi(x)\mu_t d(x)=\int_{\Theta}\varphi(x)\mu_t' d(x)$$

ყოველი $\varphi \in B(F)$ -თვის, ხოლო $\mu_t$ ერთობლიობის ლოგარითმული წარმოებულის არსებობა შემდეგი თანაფარდობის

$$\frac{d}{dt}\int_{\Theta}\varphi(x)\mu_t d(x)=\int_{\Theta}\varphi(x)\rho(t,x)\mu_t d(x), \qquad \varphi\in B(F)$$

მაგალითად თუ $\mu$ რაიმე ზომაა და $\alpha(t,x)$ $t$-ს მიმართ უწყვეტად დიფერენცირებადი ნამდვილი შემოსაზღვრული დადებითი ფუნქცია და $\alpha(T,x)\equiv 1$, მაშინ ზომათა ერთობლიობას

$$\mu_t(A)=\int_A \alpha(t,x)\mu(dx), \qquad t\in[0,T]$$

გააჩნია შემდეგი სახის ლოგარითმული წარმოებული

$$\rho(t,x)=\frac{\alpha'(t,x)}{\alpha(t,x)}$$

ცხადია, აქედან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\alpha(t,x)=e^{\int_0^t \rho(\tau,x)d\tau}, \qquad 0\le t\le T$$

სამართლიანია, შებრუნებული დებულებაც

**ლემა:** თუ $\mu_t\in M$, $t\in(0,T)$, ერთობლიობას $(\Theta,F)$ ზომად სივრცეში, გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული $\rho(t,x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

3) $\rho(t,x)$ უწყვეტია $t$- ს მიმართ, $\mu_t$ თ. ყ.

4) $\rho(t,x)$ $\sigma-$შემოსაზღვრულია იმ აზრით, რომ არსებობს $\Theta=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Theta_j$ დანაწილება ისეთი, რომ $\rho(t,x)$ შემოსაზღვრულია ყოველ $[0,T]\times\Theta_j$-ზე, მაშინ ნებისმიერი ორი $\mu_s$ და $\mu_\tau$ $s,\tau\in[0T]$, ზომები ექვივალენტურია და

$$p(s,t,x)=\frac{d\mu_s}{d\mu_\tau}(x)=e^{\int_\tau^s \rho(t,x)dt} \qquad (2.5.2)$$

**დამტკიცება:** საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varphi(x)\in B(F)$-თვის გამოსახულება

$$\int_{\Theta}\varphi(x)p(t,\tau,x)\mu(dx)=\psi(t,\tau)$$

არაა დამოკიდებული $\tau-$ზე, მაშინ $t=\tau$-თვის $\varphi(x)=I_A(x)$ ინდიკატორული ფუნქციისათვის მივიღებთ (2.5.2)-ს. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{d}{d\tau}\psi(t,x)=0.$

ფორმალურად ეს გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან

$$\frac{\partial p(t,\tau,x)}{\partial\tau}=-\rho(\tau,x) \text{ და } \frac{d}{d}\mu_\tau=\rho(\tau,x)\mu_t$$

და ამიტომ, საკმარისია შევამოწმოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით წევრწევრად გაწარმოების კანონზომიერება.

განვიხილოთ თანაფარდობა

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_{\Theta}\varphi(x)p(t,\tau+\varepsilon,x)\mu_{\tau+\varepsilon}(dx)-\int_{\Theta}\varphi(x)p(t,\tau,x)\mu_{\tau}(dx)\right\}=$$

$$=\int_{\Theta}\varphi(x)p(t,\tau,x)\frac{\mu_{\tau+\varepsilon}(dx)-\mu_{\tau}(dx)}{\varepsilon}+\int_{\Theta}\varphi(x)\frac{p(t,\tau+\varepsilon,x)-p(t,\tau,x)}{\varepsilon}\mu_{\tau}(dx)+$$

$$+\int_{\Theta}\varphi(x)\frac{p(t,\tau+\varepsilon,x)-p(t,\tau,x)}{\varepsilon}\left[\mu_{\tau+\varepsilon}(dx)-\mu_{\tau}(dx)\right]$$

ჯერ დაუშვათ, $\rho(\tau,x)$ შემოსაზღვრულია $[0,T]\times\Theta_j$-ზე. მაშინ სამივე შესაკრებში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებები შემოსაზღვრულია და შესაძლებელია ზღვარზე გადასვლა, როცა $\varepsilon\to 0$, ამასთან მესამე შესაკრები მიისწრაფის ნოლისაკენ, რადგან

$$\left\|\mu_{t+\varepsilon}-\mu_t\right\|\to 0, \quad \text{როცა } \varepsilon\to 0$$

ზოგად შემთხვევაში, განხილულ პირობებში, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\Theta=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Theta_j$ ისე, რომ ყოველ $\Theta_j$-ზე $\rho(\tau,x)$ შემოსაზღვრულია და ნებისმიერი $j$-თვის

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\Theta_j}\varphi(x)p(t,\tau,x)\mu_{\tau}(dx)=0$$

დავუბრუნდეთ (2.5.1) განტოლებას

$$y'(t)=f(t,y(t)), \qquad y(0)=X \tag{2.5.1$'$}$$

შემთხვევითი $X$ საწყისი პირობით, რომელსაც გააჩნია უცნობი $p(x)$ სიმკვრივე.

დავუშვათ, რომ:

$(f)$ $f(t,x)$ თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტი ფუნქციაა და გააჩნია უწყვეტი წარმოებული $f'_x(t,x)$.

$(2.3.1')$ ამოცანის ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, რომელსაც გააჩნია დიფერენცირებადი ტრაექტორიები ალბათობით 1. დაუშვათ $\mu_t$ არის $y(t)$ პროცესის განაწილება $t$ წერტილში ცხადია, რომ

$$\mu_0(A)=\int_A p(t)dt, \qquad A\in \mathrm{B}[0.T]$$

სადაც $\mathrm{B}[0,T]$ ბორელის $\sigma-$ალგებრაა $[0,T]$-ზე

**თეორემა 2.5.1:** თუ $p(t)>0$ და შესრულებულია $(f)$ პირობა, მაშინ $\mu_t$ ერთობლიობას გააჩნია ლოგარითმული წარმოებული.

**დამტკიცება:** ავღნიშნოთ $S_{t\tau}$-თი $(2.5.1')$ ამოცანასთან დაკავშირებული შექცევადი ევოლუციური ერთობლიობა:

$$y(t)=S_{t\tau}y, \qquad S_{t\tau}=I, \qquad S_{t\tau}\circ S_{\tau s}=S_{ts}, \quad \frac{\partial S_{t\tau}y}{\partial t}=f(t,S_{t\tau}y), \qquad 0\le s\le\tau\le t\le T$$

მაშინ

$$\mu_t(A) = P(y(t) \in A) = P(S_{t0}X \in A) = P(X \in S_{t0}^{-1}A) =$$

$$= \int_{S_{to}^{-1}} p(s)ds = \int_A p(S_{t0}^{-1}\tau)(S_{t0}^{-1})'(\tau)dt$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\mu_t$-ს გააჩნია განაწილების სიმკვრივე და

$$p_t(x) = p(S_{t0}^{-1}x)\frac{\partial(S_{t0}^{-1}x)}{\partial x}$$

ანუ

$$p(x) = p_t(S_{t0}x)\frac{\partial(S_{t0}x)}{\partial x} \tag{2.5.3}$$

ადვილად გამოითვლება $\mu_t$-ს ლოგარითმული წარმოებულიც:

$$\rho(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\ln p(S_{t0}^{-1}x)\frac{\partial(S_{t0}^{-1}x)}{\partial x}$$

დაუშვათ (2.3.1$'$) ამოცანის ამონახსნზე დაკვირვება ხდება $T$ წერტილში და $y_1(T),\ y_2(T),....,y_n(T)$. შესაბამისი შერჩევაა. საჭიროა შეფასდეს $X$ შემთხვევითი სიდიდის $p(x)$ სიმკვრივე. ავაგოთ ბირთვული შეფასება.

დაუშვათ $K(x)$ არის ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვისებები:

($k$) $K(x)$ უწყვეტი, შემოსაზღვრული, ინტეგრირებადი, დადებითი ფუნქციაა $R-$ ზე და $\int_R K(x)dx = 1$.

განვიხილოთ $p(x)$ სიმკვრივის ბირთვული შეფასება

$$p_T(x) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - y_j(T)}{h_n}\right) \tag{2.5.4}$$

სადაც $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობას:

($h$) $h_n$ დადებითი, ნოლისაკენ კრებადი ნამდვილი რიცხვთა მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $nh_n \to \infty$.

მაშინ, როგორც ცნობილია ($k$) და ($h$) პირობებში [იხ.28] $p_T(x)$ წარმოადგენს $p_T(x)$ სიმკვრივის ძალდებულ შეფასებას, ამიტომ $p_t(x)$ სიმკვრივის შეფასებისათვის (2.5.3) და (2.5.4) ფორმულებიდან გვექნება

$$p(x) = \frac{\partial(S_{t0}x)}{\partial x}p_T(S_{T0}x) \tag{2.5.5}$$

თუ ცნობილია (2.5.1) ამოცანის ინტეგრალური ნაკადი $S_{t0}$, მაშინ (2.5.5) ფორმულა წარმოადგენს საძიებელ შეფასებას. თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში ცხადი სახით ასეთი ერთობლიობის მოცემა რთული ამოცანაა, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა ხერხი.

განვიხილოთ კოშის დეტერმინირებული ამოცანა

$$y'(t) = f(t, y(t), \qquad y_0 = y(0) = x$$

და მისთვის ავაგოთ მიმდევრობა $\varphi_n(x)$, რომელიც თანაბრადკრებადია კოშის ანოცანის $y(t)$ ამონახსნისსაკენ (ასეთია, მაგალითად, პიკარის პროცედურა: $\varphi(t) = x + \int_0^t f(s, \varphi_{n-1}(s))ds, \quad n = 1,2,..., \quad \varphi_0(t) = y_0$). $S_{T0}x$-ის მიახლოებად შეგვიძლია ავიღოთ $S_{T0}^n x = \varphi_n(T)$

ამრიგად ვღებულობთ, რომ

$$p(x) = \frac{\partial(\varphi_n(T))}{\partial x} p_T(\varphi_n(T)) \tag{2.5.6}$$

წარმოადგენს $p(x)$ სიმკვრივის საძიებელ შეფასებას. ასე, რომ სამართლიანია

**თეორემა 2.5.2.** თუ კოშის (2.5.1′) ამოცანისათვის შესრულებულია $(f)$, $(k)$ და $(h)$ პირობები, სადაც $X$ უცნობი დადებითი $p(x)$ სიმკვრივის შემთხვევითი ფუნქციაა, მაშინ მისი ძალდებული შეფასება მოიცემა (2.5.6) ფორმულით

**შენიშვნა.** შეფასების განხილული მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იქნას სხვა ამოცანებშიც, მაგალითად სტოქასტურ ან კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებში შემთხვევითი საწყისი მონაცემებით.

# ლიტერატურა


1. Ghosh, J. K. and Ramamoorthi, R. V. Bayesian Nonparametrics. Springer. 2003. 310 p.
2. Kallenberg O. Lectures on Random Measures. University of Goteborg. 1974. 180 p.
3. Goulbart C. Produits Scalaires sur L'espace des Mesures. Annales del'I.H.P., Section B, Tome15, n. 4. 1979. p. 333-354.
4. Aronszain N. Theory of Reproducing Kernels. Transactions of the American Math. Society. No. 68. 1950. p. 307-404.
5. Elliott F. W. (Jr.). Sined Random Measures: Stochastic Order and Kolmogorov Consisyency Conditions. IMA Preprint Series. # 927. 1992. 16 p.
6. Suquet Ch. Convergences stochastiques de suites de mesures aleatoires a signe considerees comme variables aleatoires hilbertiennes. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris* XXXVII 1-2, 1993 p. 71-99.
7. Suquet Ch. Reproducing Kernel Hilbert Spaces and Random Measures. Pub. IRMA, Lille, Vol. 65, No I. 2005. 12 p.
8. Bryc W., Smolenski W. On Gaussian Random Measures Generated by Empirical Distributions of Independent Random Variables. Demonstratio Mathematica XXVIII.1995. p. 733-738.
9. Baryshnikov Yu., Yukich1 J. E. Gaussian Limits for Random Measures in Geometric Probability. Ann. Appl. Probab. Volume 15, Number 1A. 2005. p. 213-253.
10. Crauel H. Random Probability Measures on Polish Spaces. Taylor & Francis. 2002. 136 p.
11. Orbanz P. Projective Limit Random Measures Over Polish Spaces. arXiv: 1101.4657v2 [math.ST]. 2011. 18 p.
12. Rhodes R., Vargas V. Multidimentional Multifractal Random Measures. Electronic Journal of Probability. Vol. 15, Paper No. 19. 2010. p. 241-258.
13. Болгарслий А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и Теплопередача. Москва: Высшая школа. 1975.- с.495
14. Баклан В.В. О расширенных стохастических интегралах. Сб. "Теория случайных процессов", Вып.5.1977.-с. 3-9.
15. Гихман И. И. , Скороход А. В. Теория случайных процессов.- Москва: Наука, Т. 1. 1971.- с. 664.
16. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- Москва: Наука. 1965. –с. 448
17. Далецкий Ю. Л. , Белапольская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.-Киев: Выша школа. 1989.-с296
18. Далецкий Ю. Л. , Параманова С. И. Об одной формуле теорий гауссовских мер и оценке стохастического интегралов. Сб. "Теория вероятности и ее применения". Т 19, вып.4. 1972.-с 844-848
19. Далецкий Ю. Л. , Параманова С. И. Интегрирование по частям по мерам в функциональных пространствах и некоторые применения.- Сб. "Теория вероятности и математическая статистика" Ч. 1, Т. 17, 1977.-с.51-61.
20. Далецкий Ю. Л. , Сохадзе Г.А. Абсолютная непрерывность гладких мер.-Сб. "Функциональный анализ и его приложения" Т. 22, выпю2, 1988.-с. 77-78.
21. Далецкий Ю. Л., Сохадзе Г.А. Эквивалентность мер, сдвинутых вдоль траектории векторного поля.- Киев: Препр. 87. 53 Ин-та матем. АН УССР. 1987.-с. 16.
22. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесканечномерных простраствах. Москва: Наука, 1983.- с. 383
23. Креин С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- Москва: Наука, 1967- с. 367.

24. И.М.Ковальчик. Об одном нелинейном преобразовании гауссовских мер. Мат. Методы и физ.мех. поля. 1987 г. с. 13-16.
25. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика.- Москва: Наука, 1988.-с.- 728.
26. Липцер Р. Ш., Ширяев А. И. Статистика случайных процессов.- Москва: Наука, 1974.- с. 696.
27. Новиков И. И. Термодинамика.- Москва: "Машиностроение", 1984.-с 592.
28. Надарая Э. А. Авсава Р.М. Некоторые задачи теории непараметричесского оценивания функциональных характеристик закона распределений наблюдении. Изд-во Тбил. Ун-та. 2005.
29. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производними. .- Москва: Наука,Физматгиз,1995.- с. 252.
30. Скороход А. В. Об одном обобщении стохастических интегралов.- Сб. "Теория вероятности и математическая статистика"- Вып 2. 1975.-с.223-228.
31. Соколова С.Д. Об эквивалентности гауссовских мер, отвечающих решениям стохастических дифференциальных уравнений.- Сб. "Теория вероятности и ее применения". Т 28, вып.2. 1983.-с 429-433.
32. Сохадзе Г.А. Об Абсолютной непрерывности мер, соответствующих решениям дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторами.- Сб. докладов конференции молодых учёных по математике и механике г. Тбилиси, 1976.- с.121-124.
33. Сохадзе Г.А.. Заметка об абсолютной непрерывности мер при преобразовании цилиндрического типа. Georgian Engineering News. No. 3, 2007 y. p. 13-15.
34. Сохадзе Г.А.,Далецкий Ю. Л., Шаташвили А. Д. Об оптимальном прогнозировании случайных величин, нелинейно связных с гауссовскими.-Сб. "Теория случайных процессов", вып 3 1975.- с.30-33.
35. Сохадзе Г.А. Абсолютная непрерывность мер, порождённых некоторых краеивых задач математической физики.-Реф. Журн. "Математик". вып. II, №11В420 ДЕП. 1978.- с.10
36. Сохадзе Г.А., Шаташвили А. Д. Об эквивалентности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях в гилбертовом пространстве. Докл. АН СССР, Т.240, №4, 1978.-с.790-793.
37. Сохадзе Г.А., Шаташвили А. Д. Нелинейные преобразования гауссовских мер в гилбертовом пространстве.- Сб. "Теория случайных процессов",Киев: Наукова думка. Вып. 7, 1979.-с. 109-114.
38. Сохадзе Г.А. О мерах, порожденных решениями нелинейных уравнений элиптического типа с гауссовскими возмущениями.-Сб. "Теория случайных процессов", вып.8, 1980.- с.117-121.
39. Сохадзе Г.А. Абсолютная непрерывность распределений решении уравнений со случайным шумом. Сб. "Статистика и управление случайными процесами “. Москва: Наука, 1989. –с. 195-198.
40. Сохадзе Г.А. О мерах, порожденных решенями характеристической задачи со случайным возмущением. Тезисы докладов 20-ой школы-колоквиума по теории вероятностей и математической статистике-Бакуриани, 25 марта - 2 апреля 1986г. Тбилиси. 1986.
41. Сохадзе Г.А. Абсолютно непрерывные преобразования гауссовской меры в гилбертовом пространстве.- Известия вузов. Математика. №4/299/, 1987. – с. 65-68.
42. Ткешелашвили А. С., Далецкий Ю. Л. О вероятностных распределениях случайных функции множеств. Сообщения АН ГССР, 133, №2, 1990, с.253-256.
43. Ткешелашвили А. С. Стохастический интеграл по случайным мерам с гладким распределением. Сообщения АН ГССР, 143, №1, 1991- с.25-27.

44. Ткешелашвили А. С., Сохадзе Г.А. О преобразований случайнщй меры. Изд-во "Интелекти", 1(12), Тбилиси 2002- с. 25-27.
45. Tkeshelashvili A., Sokadze G. Some remarks on the absolute continuity for random measures under nonlinear transformations and applications in thermodynamics. International Gredenko Conference Kyiv. June 3-7 2002-p.235.
46. ტყეშელაშვილი ა. შემთვევითი მასის საშუალოს შეფასების შესახებ "მეცნიერება და ტექნოლოგიები" . №10-12, თბილისი. 2002-გვ.32-37.
47. Tkeshelashvili A. Estimation of Solution of some Nonlinear Differential Equations with Random Measures Parameters. Bull. Georgian Acad. Sci.171,3,2006-p.247-249
48. Tkeshelashvili A., Sokadze G. On one cilindrical type transformation of a random mesure. Reports of Enlarget Session of the Seminar of I. Vekua. Inst. Of App. Math. 22. 2008 p. 101-105
49. Tkeshelashvili A. Shatashvili A. A remark on probability distributions and characteristic functionals for random funqcions of sets . Random Operators and Stochastic Eqs. 16. 2008, p 303-305.
50. Tkeshelashvili A. Shatashvili A. On the formula of integration by parts with respeqt to a random measure. Random Operators and Stochastic Eqs. 17. 2009, p 197-199.
51. Ткешелашвили А.С.,Новожилова Е.Г., Сохадзе Г.А., Шаташвили А.Д., Фомин-Шаташвили А О второй краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Georgian Ingeneering News. 3. 2008. P. 7-11
52. Ткешелашвили А. С. О статистическом оценивании начального распределения вероятностей по наблюдениям динамики в конце интервала. Укр. Мат. Журн. Т. 63. №3 с. 427-431
53. Черный Г. Г. Газовая динамика. Москва: Наука, 1988.-с. 424.
54. Чкония Т. Г. Заметка о логаритмической производной меры. "Сообщения Академии наук Грузии". 150,№3,1994.-с.407-410.
55. Халмош П. Теориа меры. Москва: изд. иностарнной литературы, 1953. – с. 735.
56. Cameron R., Martin W. Evolutions of Various Wiener Integrals by use of Certain Sturm-Liouville Differential Equations.-Bull. Amer. Math. soc., 51, 1995.-p.73-90.
57. Cameron R., Martin W. Transformation of Wiener Integrals under Translations.- Ann. Math., 45, 1994. p. 386-396.
58. Jnoue K. Eqvivalence of Measures for Some Class of Gaussian Fields.-Multiyvar. Anal. 6, N2, 1976.-p 295-308.
59. Sokadze G. Absolute Continuity of Measures Generated with Nonlinear Equations.-Colleqtive papers. 1991.-p 540-549.
60. Ramer R. On Nonlinear Transformations of Gaussian Measures.-Funqt. Annal., 15.2, 1974.-166-187.